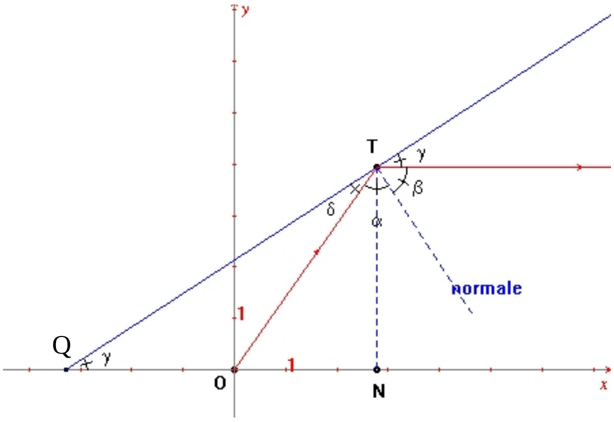
Applications des mathématiques - Cabri-géomètre
Thème : La courbe du phare de voiture

La méthode d'Euler-Cauchy

En gros, sur chaque intervalle, on remplace la courbe intégrale par sa tangente. Cette méthode fut exposée par Euler en 1768, et utilisée par Cauchy en 1824 pour démontrer le théorème fondamental d'existence appelé aujourd'hui *théorème de Cauchy-Lipschitz*.

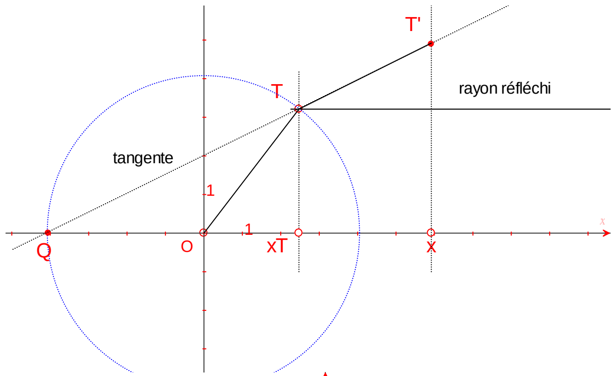
Le réflecteur de phare

On veut construire un réflecteur de phare pour que les rayons lumineux émis par une source ponctuelle forment, après réflexion, un faisceau parallèle.
Quelle forme faut-il donner à ce réflecteur ?

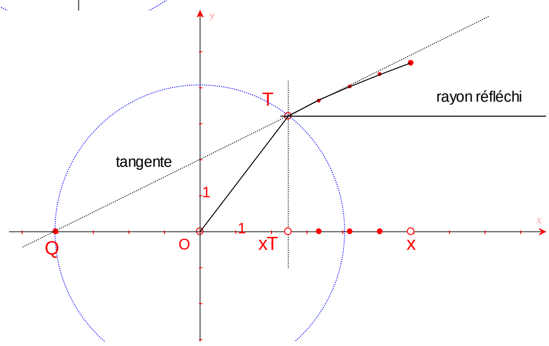


Pour étudier ce problème, on peut se restreindre à l'étudier dans un plan. On place la source lumineuse à l'origine d'un repère Oxy pour obtenir un faisceau réfléchi parallèle à l'axe des abscisses. Pour des raisons de symétrie, il suffit de chercher une solution dans le demi-plan supérieur ($y > 0$). Par la loi de la réflexion, on a $\alpha = \beta$ et par conséquent $\gamma = \delta$. L'angle $\widehat{NOT}$ vaut alors 2γ. Donc le triangle OQP est isocèle.

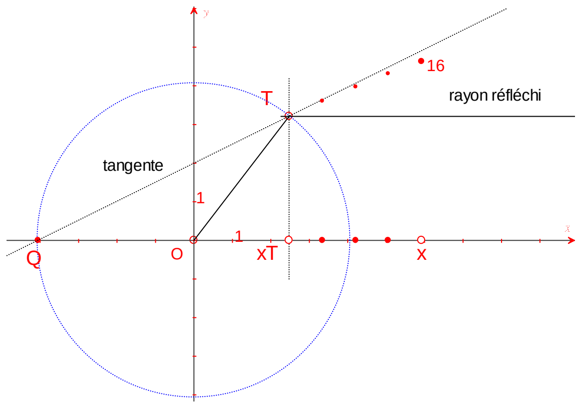
- à partir d'un point T du plan, on construit la tangente (TQ) en T à la courbe recherchée, où OQ = OT et O est un point de l'axe des abscisse ;
- on construit une macro "phare1 " avec objets initiaux : les axes, T et x , et comme objet final le segment tangent [T,T'] de la tangente en T ;



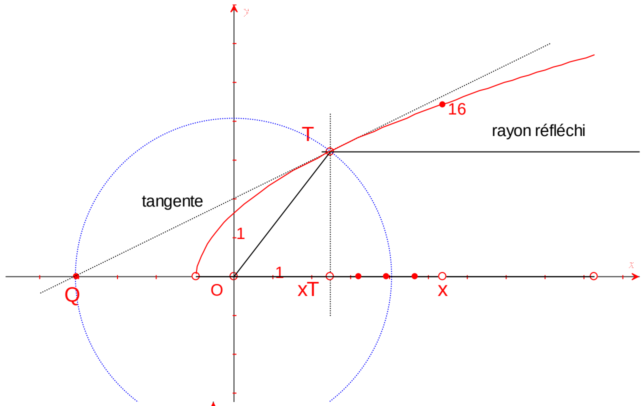
- puis une macro "phare4" avec objets initiaux :
les axes, T et x, et comme objets finaux les 4 segments tangents construits à partir des 4 points de subdivision de l'intervalle [x_T , x] (obtenus en appliquant 4 fois la macro "phare1") ;
- puis une macro "phare4-point" avec objets initiaux :
les axes, T et x, et comme objet final le dernier point au dessus de x ;



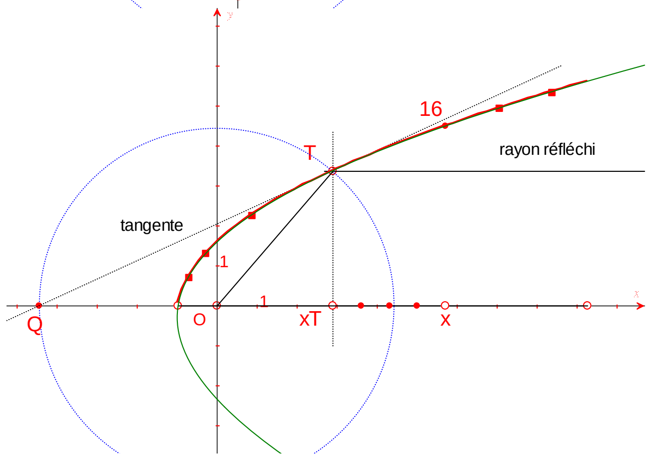
- puis une macro "phare16-point" avec objets initiaux : les axes, T et x et comme objet final le dernier point au dessus du point x construit en appliquant 4 fois la macro « phare4-point » ;



- on demande ensuite le lieu de ce dernier point « 16 » lorsque x parcourt un segment bien choisi de l'axe des abscisses , ce qui nous donne une bonne approximation de la courbe solution au voisinage du point T.

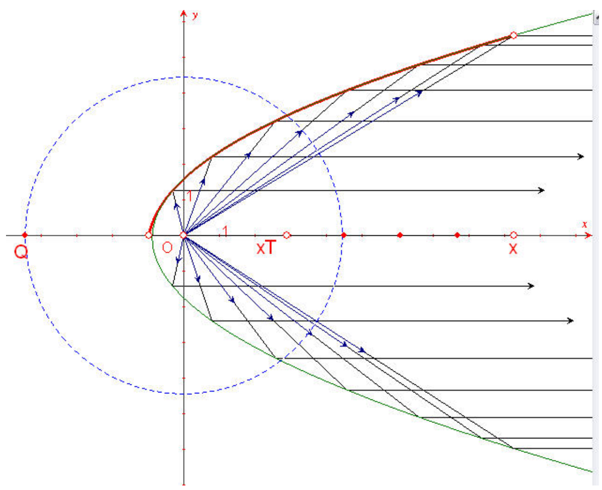


On peut encore coller sur le lieu une conique avec cinq points et vérifier que Cabri nous donne bien … une hyperbole (et non une parabole), mais la deuxième branche de l'hyperbole est très éloignée : on peut donc estimer que cette hyperbole est presque une parabole ! !



Il reste à vérifier qu'en un point quelconque de cette courbe, par exemple au point « 16 »d'abscisse x, l'angle d'incidence et l'angle de réflexion soit « égaux » ;
pour cela il faut construire la tangente en T à la pseudo-parabole de foyer O.

Finalement, avec l'outil "trace" et l'animation , on peut simuler un phare de voiture :



Rechercher sur Internet des infos sur une célèbre courbe mathématique : la tractrice :
Lors de séjour de Leibniz à Paris (1672 - 1676), le célèbre mathématicien et architecte Claude Perrault lui propose le problème suivant : pour quelle courbe en chaque point P la tangente est de longueur constante a entre P et l'axe (OI) ?
Pour illustrer cette question, il tire de son gousset une « horologio portabili suae thecae argentae »
et la fait glisser sur la table.
Aucun autre mathématicien de sa connaissance n'avait été capable d'en trouver la formule.
Leibniz publie sa solution en 1693 en affirmant qu'il la connaît depuis longtemps.