Interrogation de mathématique - 9

(Chapitre 2)

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

1) $\sqrt{3x^2 + 25} \geqslant 2x$

2) $\sqrt{x + 5} > \sqrt{3 - x}$

3) $2\sqrt{5x + 3} - \sqrt{3x - 5} < 0$

4) $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$

5) $5x^4 + 13x^2 = -6$

6) $\sqrt{169 - x^2} = x - 17$

1) $\sqrt{3x^2+25} \geqslant 2x$ et $x \in \mathbb{R}$

condition :

$\underbrace{\underbrace{3x^2}_{\geqslant 0}+\underbrace{25}_{>0}}_{>0} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty;0[$ et $\underbrace{\sqrt{3x^2+25}}_{>0} \geqslant \underbrace{2x}_{<0}$

et $x \in]-\infty;0[$

ou

$x \in [0;+\infty[$ et $\underbrace{\sqrt{3x^2+25}}_{>0} \geqslant \underbrace{2x}_{\geqslant 0}$ $)^{\wedge}2$

et $3x^2+25 \geqslant 4x^2$

et $0 \geqslant x^2-25$

et $0 \geqslant (x-5)(x+5)$

et $x \in [-5;5] \cap [0;+\infty[$

et $x \in [0;5]$

x		-5		$+5$		$\to \mathbb{R}$
x^2-25	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Leftrightarrow x \in]-\infty;0[\cup [0;5] \Leftrightarrow x \in]-\infty;5]$

2) $\underbrace{\sqrt{x+5}}_{\geqslant 0} > \underbrace{\sqrt{3-x}}_{\geqslant 0}$ $)^{\wedge}2$ et $x \in [-5;3]$

conditions

$\begin{cases} x+5 \geqslant 0 \\ \text{et} \\ 3-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -5 \\ \text{et} \\ x \leqslant 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in [-5;3]$

$\Leftrightarrow x+5 > 3-x$ et ...

$\Leftrightarrow 2x > -2$ et ...

$\Leftrightarrow x > -1$ et ...

$\Leftrightarrow x \in]-1;+\infty[\cap [-5;3]$

$\Leftrightarrow x \in]-1;3]$

3) $2\sqrt{5x+3} - \sqrt{3x-5} < 0$ et $x \in [\frac{5}{3};+\infty[$

conditions

$\begin{cases} 5x+3 \geqslant 0 \\ \text{et} \\ 3x-5 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -\frac{3}{5} \\ \text{et} \\ x \geqslant \frac{5}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in [\frac{5}{3};+\infty[$

$\Leftrightarrow \underbrace{2\sqrt{5x+3}}_{\geqslant 0} < \underbrace{\sqrt{3x-5}}_{\geqslant 0}$ $)^{\wedge}2$

$\Leftrightarrow 4(5x+3) < 3x-5$ et ...

$\Leftrightarrow 20x+12-3x+5 < 0$ et ...

$\Leftrightarrow 17x+17 < 0$ $):17$ et ...

$\Leftrightarrow x+1 < 0$

$\Leftrightarrow x < -1$ et ... $\Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cap [\frac{5}{3};+\infty[\Leftrightarrow x \in \emptyset$

4) $3x^4-2x^2-1=0$ et $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow t=x^2$ et $3t^2-2t-1=0$

et $3t^2-3t+t-1=0$

et $3t(t-1)+1\cdot(t-1)=0$

et $(t-1)(3t+1)=0$

$\begin{cases} m+n=-2 \\ m\cdot n=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ n=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x^2-1)\underbrace{(3x^2+1)}_{\neq 0}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x\in\{-1;+1\}$

5) $5x^4+13x^2=-6$ et $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow t=x^2$ et $5t^2+13t+6=0$

et $5t^2+10t+3t+6=0$

et $5t(t+2)+3(t+2)=0$

et $(t+2)(5t+3)=0$

$\begin{cases} m+n=13 \\ m\cdot n=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x^2+2)}_{\neq 0}\cdot\underbrace{(5x^2+3)}_{\neq 0}=0$

$\Leftrightarrow x\in\emptyset$

Autre méthode : $5x^4+13x^2=-6$ et $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{5x^4}_{\geq 0}+\underbrace{13x^2}_{\geq 0}+\underbrace{6}_{>0}}_{>0}=0$

$\Leftrightarrow x\in\emptyset$

2) $\underbrace{\sqrt{169 - x^2}}_{\geqslant 0} = \underbrace{x - 17}_{\cancel{\geqslant}\; < 0}$ et $x \in [-13 ; 13]$

$\Leftrightarrow x \in \emptyset$

$169 - x^2 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 169 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow (x-13)(x+13) \leqslant 0$

$\Leftrightarrow x \in [-13 ; 13]$

x		-13		13	
$1 \cdot x^2 - 169$	$+$	0	$-$	0	$+$

x	-13	13		17		$\mathbb{R}$
$1 \cdot x - 17$	$-$			0	$+$	

$\underbrace{-13 \quad 13}_{D}$