2 F arts Lundi 17 février 2020

Interrogation de mathématique - 11

(Chapitre 3 : Vecteurs - 1)

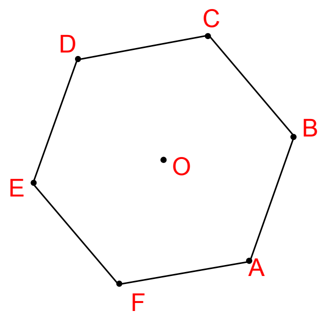
1) Définir l'équipollence des bipoints du plan.
2) Qu'est-ce qu'un vecteur ?
3) Qu'est-ce qu'une relation d'équivalence.
4) Qu'est-ce qu'une classe d'équivalence ?
5) Définir l'application « translation de vecteur $\vec{v}$ ».
6) Compléter de trois manières possibles l'équivalence suivante : (A,B) ~ (C,D) ⇔ …⇔ …⇔ …
7) Démontrer que M est milieu de [A,B] si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ (poser $\boxed{H}$, $\boxed{T}$, $\boxed{D}$)
8) Est-ce vrai ou faux ? Si l'écriture est vraie, justifier ; sinon, corriger l'écriture.

   a) $(C,D) \in \overrightarrow{CD}$ b) $\vec{v} \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$

   c) $\{A,B\} \subset \overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{AB} \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}$

9) Soit ABCDEF un hexagone régulier de centre O ;
   Exprimer plus simplement en **expliquant** la démarche :

   a) $\vec{u} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CD}$
   b) $\vec{u} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AF}$
   c) $\vec{w} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{FO} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{DB}$



1)

Définition 1 Deux bipoints (A,B) et (C,D) sont dits **équipollents** si et seulement si (A,D) et (B,C) ont même milieu. La relation ainsi définie dans l'ensemble des bipoints du plan se nomme **équipollence**.

2)

Définition 3 On appelle **vecteur** du plan toute classe d'équivalence selon la relation d'équipollence des bipoints dans $\mathbf{P} \times \mathbf{P}$.

3)-4)

Définition 4	Une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est dite				
réflexive	si et seulement si	$\forall\, x \in E$	$x \mathcal{R} x$		
symétrique	si et seulement si	$\forall\, \{x, y\} \subset E$	$x \mathcal{R} y$	$\Rightarrow$	$y \mathcal{R} x$
antisymétrique	si et seulement si	$\forall\, \{x, y\} \subset E$	$(x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x)$	$\Rightarrow$	$x = y$
transitive	si et seulement si	$\forall\, \{x, y, z\} \subset E$	$(x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z)$	$\Rightarrow$	$x \mathcal{R} z$

Définition 5 Si une relation $\mathcal{R}$ dans E est réflexive, symétrique et transitive, on dit qu'elle est une**relation d'équivalence**.

L'ensemble des éléments de E en relation d'équivalence avec un élément **x** s'appelle la **classe** (d'équivalence) de **x**.

4)

Définition 2 La **classe d'équivalence** d'un élément a, selon une relation d'équivalence dans un ensemble E, est la partie de E comportant les éléments en relation d'équivalence avec a.

5)

On appelle ***translation*** *de vecteur* $\vec{v}$ *la relation* $t_{\vec{v}} = (\mathbf{P}, \mathbf{P}, G)$, *où* $(A,A') \in G \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{v}$.

6) $(A,B)\,\mathcal{R}\,(C,D) \Leftrightarrow [A,D]$ et $[B,C]$ ont même milieu

$\Leftrightarrow$ $ABDC$ parallélogramme

$\Leftrightarrow (A,C)\,\mathcal{R}\,(B,D)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow (A,B) \in \overrightarrow{CD}$.

7) (H) $\{A,B\} \subset \mathbb{P}$, $M \in \mathbb{P}$

(T) M milieu de $[A,B] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

(D) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow (A,M)\,\mathcal{R}\,(M,B) \Leftrightarrow [A,B]$ et $[M,M]$ ont $\bar{m}$ milieu

$\Leftrightarrow M$ milieu de $[A,B]$ cqfd

8) a) $(C,D) \in \overrightarrow{CD}$: vrai par définition

b) $\vec{v} \in \mathbb{P}\times\mathbb{P}$: faux, mais $\vec{v} \subset \mathbb{P}\times\mathbb{P}$ par définition

c) $\{A,B\} \subset \overrightarrow{AB}$: faux, mais $(A,B) \in \overrightarrow{AB}$ par déf.

d) $\overrightarrow{AB} \subset \mathbb{P}\times\mathbb{P}$: vrai par définition

9) Données: * $ABCDEF$ hexagone régulier de centre O

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CD}$ car $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OE}$

$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE}$ Chasles

$= \overrightarrow{AE}$

b) $\vec{v} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AF}$ car $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}$ Chasles

$= \overrightarrow{OD}$

c) $\vec{w} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{FO} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{DB}$

$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{BO} + \underbrace{(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EO})}_{= \overrightarrow{OO} = \vec{0}} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DB}$

$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{FO} + \underbrace{(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BO})}_{= \overrightarrow{DO}} + \overrightarrow{CO}$ car $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OF}$

$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OA}$

$= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OF}) = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{FF} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$