

Examen de mathématique - 4

(Révision d'algèbre – partie 3)

- 1) Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :
- a) $3x^2 - 9x + 18 = 0$ b) $3x^2 - 45 = 0$
c) $6x^2 + x = 1$ d) $\frac{x^2}{3} + \frac{12}{25} = \frac{4x}{5}$
e) $|x^2 + 1| = 2$
- 2) Résoudre les inéquations suivantes :
- a) $\frac{1-x^2}{(x+1)^2} \geq 0$ b) $|5 - x| < 3$
c) $\sqrt{x^2+4} > -\sqrt{3}$
- 3) Résoudre et discuter les inéquations paramétriques suivantes :
- a) $(m^2+4)x \geq m^2x - 3 + 6x$ b) $x(3m + 1) > x(2 - m)$
- 4) Développer, factoriser ou calculer à l'aide des formules remarquables :
- a) $x^4 - 16 =$ b) $x^6 - 1 =$
c) $(3x^2 + 2)^3 =$ d) $(-x + 4)(-x - 4) =$
e) $67 \cdot 73 =$ f) $(x^3 - x)(x^3 + x) =$
g) $(x^2 - y^3)(x^2 + y^3) =$

L

$$1) \ a) \ 3x^2 - 9x + 18 = 0, \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 6 = 0 \quad \downarrow :3$$

$$\Leftrightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 \\ = 9 - 24 = -15 < 0$$

$$\text{et } x \in \emptyset$$

$$\begin{cases} m+n = -3 \\ m \cdot n = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = ? \\ n = ? \end{cases}$$

$$b) \ 3x^2 - 45 = 0, \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 15 = 0 \quad \downarrow :3$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{15})(x + \sqrt{15}) = 0 \quad \Leftrightarrow x \in \{ \sqrt{15}; -\sqrt{15} \}$$

$$c) \ 6x^2 + x = 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 3x - 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(2x+1) - (2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(3x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right\}$$

$$\begin{cases} m+n = 1 \\ m \cdot n = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = -2 \end{cases}$$

$$d) \ \frac{x^2}{3} + \frac{12}{25} = \frac{4x}{5}, \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 + 36 = 60x \quad \downarrow \times 75$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 - 60x + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow (5x-6)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{6}{5} \right\}$$

$$e) \ \underbrace{|x+1|}_{>0} = 2 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow x \in \{1; -1\}$$

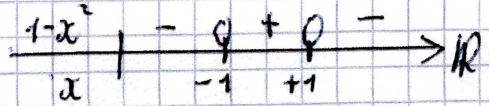
car $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

L

2) a) $\frac{1-x^2}{(x+1)^2} \geq 0$ et $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$\Leftrightarrow 1-x^2 \geq 0$ (car $(x+1)^2 > 0$)
 $(\Leftrightarrow (1-x)(1+x) \geq 0)$ inutile

$\Leftrightarrow x \in]-1; +1]$



b) $|5-x| < 3$ et $x \in \mathbb{R}$ } car $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$

$\Leftrightarrow -3 < 5-x < 3$

$\Leftrightarrow -8 < -x < -2$

$\Leftrightarrow 8 > x > 2$

$\Leftrightarrow x \in]2; 8[$

c) $\sqrt{x^2+4} > -\sqrt{3}$ et $x \in \mathbb{R}$ (car $x^2+4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ (car " $>$ " vs " $>$ " toujours vrai)

3) a) $(m^2+4)x \geq m^2x-3+6x$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \cancel{m^2x} + 4x - \cancel{m^2x} - 6x \geq -3$

$\Leftrightarrow -2x \geq -3$ } $:(-2)$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty; \frac{3}{2}]$

b) $x(3m+1) > x(2-m)$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x(3m+1) - x(2-m) > 0$

$\Leftrightarrow (3m+1-2+m)x > 0$

$\Leftrightarrow (4m-1)x > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{4} \text{ et } 0 \cdot x > 0 \text{ et } x \in \emptyset \\ \text{ou} \\ m > \frac{1}{4} \text{ et } x > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$

ou $m < \frac{1}{4}$ et $x \in \mathbb{R}_-^*$

L

$$4) \quad a) \quad x^4 - 16 = x^4 - 2^4 = (x^2)^2 - (2^2)^2 \\ = (x^2 - 4)(x^2 + 4) \\ = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

$$b) \quad (x - y^2 - z)^2 = x^2 + y^4 + z^2 - 2xy^2 - 2xz + 2y^2z$$

$$c) \quad (3x^2 + 2)^3 = (3x^2)^3 + 3(3x^2)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x^2 \cdot 2^2 + 2^3 \\ = 27x^6 + 54x^4 + 36x^2 + 8$$

$$d) \quad (-x + 4)(-x - 4) = (-x)^2 - 4^2 = x^2 - 16$$

$$e) \quad 67 \cdot 73 = (70 - 3)(70 + 3) = 4900 - 9 = 4891$$

$$f) \quad (x^3 - x)(x^3 + x) = (x^3)^2 - x^2 = x^6 - x^2 \\ = x^2(x^4 - 1) = x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1) \\ = x^2(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

$$g) \quad (x^2 - y^3)(x^2 + y^3) = (x^2)^2 - (y^3)^2 = x^4 - y^6$$

$$h) \quad x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) \\ = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

L