

## Examen de mathématique - 3

( Révision d'algèbre – partie 1)

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $x^2 - 3x - 40 = 0$

b)  $3x^2 - 17x + 10 = 0$

c)  $\sqrt{5}x^2 - 7x + 3\sqrt{5} = 0$

d)  $|2x + 1| = 3$

2) Résoudre les inéquations suivantes :

a)  $x^2 - x < 12$

b)  $\frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x}$

c)  $\sqrt{x-20} < 6$

3) Résoudre et discuter les inéquations paramétriques suivantes :

a)  $x(5m + 1) < x(2 - 4m)$

b)  $m^2(x - 2) - m \leq 0$

4) Développer, factoriser ou calculer à l'aide des formules remarquables :

a)  $\left(1 - \frac{2}{5}x^2\right)^2 =$

b)  $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) =$

c)  $(3x - 2)(9x^2 - 12x + 4) =$

d)  $76 \cdot 84 =$

e)  $(x^5 - y^4)(x^5 + y^4) =$

f)  $x^6 - 16 =$

$$1a) \quad x^2 - 3x - 40 = 0 \quad \begin{cases} m+n = -3 \\ m \cdot n = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -8 \\ n = +5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x-8)(x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{8; -5\}$$

$$1b) \quad 3x^2 - 17x + 10 = 0 \quad \begin{cases} m+n = -17 \\ m \cdot n = 3 \cdot 10 = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 15x - 2x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x-5) - 2(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(3x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ 5; \frac{2}{3} \right\}$$

$$1c) \quad \sqrt{5}x^2 - 7x + 3\sqrt{5} = 0 \quad \text{et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot \sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}$$

$$= 49 - 12 \cdot 5$$

$$= 49 - 60 = -11 < 0$$

$$\text{et } x \in \emptyset$$

$$\begin{cases} m+n = -7 \\ m \cdot n = \sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = ? \\ n = ? \end{cases}$$

$$2) a) |2x+1| = 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \text{ et } 2x+1=3 \\ \text{et } 2x=2 \\ \text{et } x=1 \text{ et } x \in \{1\} \text{ (car } 1 \geq -\frac{1}{2}) \end{cases} \quad \frac{2x+1}{x} \begin{array}{c} - \\ 0 \\ + \\ -\frac{1}{2} \end{array} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{ou} \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \text{ et } -(2x+1)=3 \\ \text{et } -2x-1=3 \\ \text{et } -2x=4 \\ \text{et } x=-2 \text{ et } x \in \{-2\} \text{ (car } -2 < -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{1\} \cup \{-2\} \Leftrightarrow x \in \{1; -2\}$$

Autre méthode:

$$a) |2x+1| = 3 \text{ et } x \in \mathbb{R} \quad \left. \begin{array}{l} \text{exercice 30 : } |x| = y \text{ et } y > 0 \\ \Leftrightarrow x = \pm y \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = \pm 3$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=3 \quad \text{ou} \quad 2x+1=-3$$

$$\Leftrightarrow 2x=2 \quad \text{ou} \quad 2x=-4$$

$$\Leftrightarrow x=1 \quad \text{ou} \quad x=-2$$

$$\Leftrightarrow x \in \{1; -2\}$$

ou encore:

$$a) |2x+1| = 3 \text{ et } x \in \mathbb{R} \quad \left. \begin{array}{l} \text{1} \\ \text{2} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^2 = 3^2$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^2 - 3^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1-3)(2x+1+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-2) \cdot (2x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1) \cdot 2(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{1; -2\}$$

théorème

$$(H) \{a; b\} \subset \mathbb{R}_+^x$$

$$(T) a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$$

$$(D) a=b \Leftrightarrow a-b=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(a-b)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(a+b)}_{\neq 0} = 0 \cdot \underbrace{(a+b)}_{\neq 0}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2$$

qfd

$$2) \quad a) \quad x^2 - x < 12 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x+3) < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-3; 4[$$

$x$	$-\infty$	$-3$	$4$	$+\infty$
$\frac{x-4}{x+3}$	$-$	$  -$	$0 +$	$+$
$P$	$+$	$0 -$	$0 +$	$+$

$$2) \quad b) \quad \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x} \text{ et } x \in \mathbb{R} - \{-1; 0\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \geq 0$$

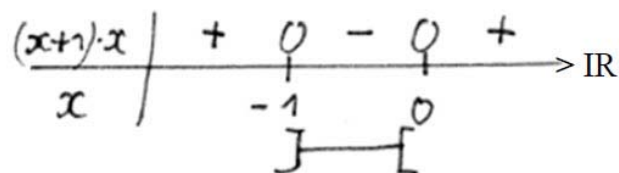
$$\Leftrightarrow \frac{x - (x+1)}{(x+1) \cdot x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{(x+1) \cdot x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+1) \cdot x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1) \cdot x < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-1, 0[$$



$$2c) \quad \sqrt{x-20} < \underbrace{6}_{>0} \text{ et } x \in \underbrace{[20, +\infty[}_{D_f}$$

$$\Leftrightarrow x-20 < 36$$

$$\Leftrightarrow x-56 < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 56$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-\infty, 56[ \cap D_f \Leftrightarrow x \in [20, 56[$$

$$\text{Signes de } (x-20): \begin{array}{c} - \quad 0 \quad + \\ \quad \quad 20 \end{array} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{on veut } x-20 \geq 0$$

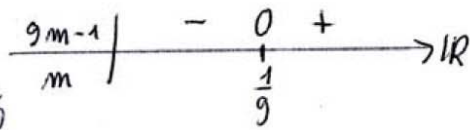
$$\Leftrightarrow x \geq 20 \Leftrightarrow x \in [20, +\infty[$$

$$1a) \quad x(5m+1) < x(2-4m) \quad \text{et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x(5m+1) - x(2-4m) < 0$$

$$\Leftrightarrow (5m+1-2+4m) \cdot x < 0$$

$$\Leftrightarrow (9m-1) \cdot x < 0$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{9} \text{ et } 0 \cdot x < 0 \text{ et } x \in \emptyset \\ \text{ou} \\ m < \frac{1}{9} \text{ et } x > \frac{0}{9m-1} \text{ et } x > 0 \text{ et } x \in ]0; +\infty[ \\ \text{ou} \\ m > \frac{1}{9} \text{ et } x < 0 \text{ et } x \in ]-\infty; 0[ \end{cases}$$

$$c) \quad m^2(x-2) - m \leq 0 \quad \text{et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow m^2 \cdot x - 2m^2 - m \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 \cdot x \leq 2m^2 + m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ et } 0 \cdot x \leq 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ m \neq 0 \text{ et } \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \neq 0 \text{ et } \underbrace{m^2}_{>0} \cdot x \leq m(2m+1) \end{cases}$$

$$\text{et } x \leq \frac{m(2m+1)}{m^2}$$

$$\text{et } x \in ]-\infty; \frac{2m+1}{m}]$$

$$1) \left(1 - \frac{2}{5}x^2\right)^2 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{25}x^4 = \frac{4}{25}x^4 - \frac{4}{5}x^2 + 1$$

$$2) (x - 2y^2 - 3z^3)^2 = x^2 + 4y^4 + 9z^6 - 4xy^2 - 6xz^3 + 12y^2z^3$$

$$3) (2x+3)(4x^2-6x+9) = (2x)^3 + 3^3 = 8x^3 + 27$$

$$4) (3x^2+2)^3 = (3x^2)^3 + 3 \cdot (3x^2)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x^2 \cdot 2^2 + 2^3$$

$$= 27x^6 + 54x^4 + 36x^2 + 8$$

$$5) (3x-2)(9x^2-12x+4) = (3x-2)(3x-2)^2 = (3x-2)^3$$

$$= 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$$

$$6) (-x+4)(-x-4) = (-x)^2 - 4^2 = x^2 - 16$$

$$7) 52^3 = (50+2)^3 = 50^3 + 3 \cdot 50^2 \cdot 2 + 3 \cdot 50 \cdot 2^2 + 2^3$$

$$= 125'000 + 6 \cdot 2500 + 12 \cdot 50 + 8$$

$$= 125'000 + 15'000 + 600 + 8$$

$$= 140'608$$

$$8) (x^3-x)(x^3+x) = (x^3)^2 - x^2 = x^6 - x^2$$

$$9) 77 \cdot 83 = (80-3) \cdot (80+3) = 80^2 - 3^2 = 6400 - 9 = 6391$$

$$10) x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2 = (x^3-1)(x^3+1) = (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$$

$$11) x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$$

$$12) (x-14)^2 = x^2 - 28x + 14^2 = x^2 - 28x + 196$$

$$14^2 = 14 \cdot 14$$

$$= (10+4)^2 = 100 + 80 + 16$$

$$= 196$$

$$13) (x^2-y^3) \cdot (x^2+y^3) = (x^2)^2 - (y^3)^2 = x^4 - y^6$$

$$14) (x^m + y^n)^2 = (x^m)^2 + 2x^m y^n + (y^n)^2 = x^{2m} + 2x^m y^n + y^{2n}$$