Interrogation de mathématique – 7

(Algèbre – chapitre 2)

1) Résoudre les inéquations paramétriques suivantes :
   a) $x(5m + 1) < x(2 - 4m)$ c) $m^2 (x - 2) - m \leqslant 0$
   b) $(m^2+4)x \geqslant m^2x - 3 + 6x$
2) Résoudre les inéquations suivantes :
   a) $|2x + 1| = 3$ b) $|5 - x| > 3$
   c) $|x + 1| + |-x + 3| = -2$

1 a) $x(5m+1) < x(2-4m)$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x(5m+1) - x(2-4m) < 0$

$\Leftrightarrow (5m+1-2+4m)\cdot x < 0$

$\Leftrightarrow (9m-1)\cdot x < 0$

m		$\frac{1}{9}$	
$9m-1$	$-$	0	$+$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{9} \text{ et } 0\cdot x < 0 \text{ et } x \in \emptyset \\ \text{ou} \\ m < \frac{1}{9} \text{ et } x > \frac{0}{9m-1} \text{ et } x > 0 \text{ et } x \in \left]0;+\infty\right[\\ \text{ou} \\ m > \frac{1}{9} \text{ et } x < 0 \text{ et } x \in \left]-\infty;0\right[\end{cases}$$

1) b) $(m^2+4)x \geqslant m^2x - 3 + 6x$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \cancel{m^2}x + 4x \geqslant \cancel{m^2}x - 3 + 6x$

$\Leftrightarrow 4x \geqslant -3 + 6x$

$\Leftrightarrow 4x - 6x \geqslant -3$

$\Leftrightarrow -2x \geqslant -3$

$\Leftrightarrow x \leqslant \frac{3}{2}$ et $x \in \left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$

$\Leftrightarrow$

c) $m^2(x-2) - m \leqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m^2\cdot x - 2m^2 - m \leqslant 0$

$\Leftrightarrow m^2\cdot x \leqslant 2m^2 + m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ et } 0\cdot x \leqslant 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ m \neq 0 \text{ et } \underbrace{m^2}_{>0}\cdot x \leqslant m(2m+1) \\ \quad \text{et } x \leqslant \frac{\cancel{m}(2m+1)}{m^{\cancel{2}}} \\ \quad \text{et } x \in \left]-\infty;\frac{2m+1}{m}\right] \end{cases}$$

2) a) $|2x+1| = 3$ et $x \in \mathbb{R}$

$2x+1$	$-$	0	$+$	$\to \mathbb{R}$
x		$-\frac{1}{2}$		

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \text{ et } 2x+1 = 3 \\ \quad \text{et } 2x = 2 \\ \quad \text{et } x = 1 \text{ et } x \in \{1\} \ \left(\text{car } 1 \geq -\frac{1}{2}\right) \\ \text{ou} \\ x < -\frac{1}{2} \text{ et } -(2x+1) = 3 \\ \quad \text{et } -2x-1 = 3 \\ \quad \text{et } -2x = 4 \\ \quad \text{et } x = -2 \text{ et } x \in \{-2\} \ \left(\text{car } -2 < -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \in \{1\} \cup \{-2\} \Leftrightarrow x \in \{1; -2\}$

Autre méthode :

a) $|2x+1| = 3$ et $x \in \mathbb{R}$ ↲ exercice 30 : $|x| = y$ et $y > 0$ $\Leftrightarrow x = \pm y$

$\Leftrightarrow 2x+1 = \pm 3$

$\Leftrightarrow 2x+1 = 3$ ou $2x+1 = -3$

$\Leftrightarrow 2x = 2$ ou $2x = -4$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -2$

$\Leftrightarrow x \in \{1; -2\}$

ou encore :

a) $|2x+1| = 3$ et $x \in \mathbb{R}$ ↲ $\wedge 2$

$\Leftrightarrow (|2x+1|)^2 = 3^2$

$\Leftrightarrow (2x+1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow (2x+1)^2 - 3^2 = 0$

$\Leftrightarrow (2x+1-3)(2x+1+3) = 0$

$\Leftrightarrow (2x-2) \cdot (2x+4) = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-1) \cdot 2(x+2) = 0$

$\Leftrightarrow x \in \{1; -2\}$

théorème

(H) $\{a; b\} \subset \mathbb{R}_+^*$

(T) $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

(D) $a = b \Leftrightarrow a - b = 0$

$\Leftrightarrow (a-b) \cdot \underbrace{(a+b)}_{\neq 0} = 0 \cdot \underbrace{(a+b)}_{\neq 0}$

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2$

qfd

2e) $|5-x| > 3$ et $x \in \mathbb{R}$

exercice 30 :

$|x| > y$ et $y > 0$

$\Leftrightarrow x > y$ ou $x < -y$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-x > 3 \\ \text{ou} \\ 5-x < -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 > x \\ \text{ou} \\ 8 < x \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty ; 2[\cup]8 ; +\infty[$

2c) $\underbrace{\underbrace{|x+1|}_{\geq 0} + \underbrace{|-x+3|}_{\geq 0}}_{>0} = \underbrace{-2}_{<0}$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x \in \emptyset$