

Examen de mathématique - I

(Chapitre 1)

1) Résoudre et discuter les équations paramétriques suivantes :

a) $m^2(x-1) - 2(m+1)x = m + x$ b) $\frac{x+m}{m-1} - \frac{x-m}{m+1} = \frac{mx-8}{1-m^2}$

c) $a(x - a^2) = b(x - b^2)$

2) Résoudre $f(x) = 0$ si :

a) $f(x) = \frac{x}{x+1} - \frac{2}{x} - \frac{x^2}{x^2+x}$ b) $f(x) = \frac{2x+1}{x+3} - \frac{x+1}{x-4} - \frac{5(1-2x)}{x^2-x-12}$

3) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ si :

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b) $f(x) = (x-3)(x^2-6) - (3-x)(2x+3) + (4x-12)$

c) $f(x) = -6x^2 - x + 15$

1) a) $m^2(x-1) - 2(m+1)x = m+x$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m^2x - m^2 - 2mx - 2x - m - x = 0$

$\Leftrightarrow m^2x - 2mx - 3x = m^2 + m$

$\Leftrightarrow (m^2 - 2m - 3)x = m(m+1)$

$\Leftrightarrow (m-3)(m+1)x = m(m+1)$

$\Leftrightarrow m = -1$ et $0 \cdot x = 0$ et $x \in \mathbb{R}$

ou $m = 3$ et $0 \cdot x = 12$ et $x \in \emptyset$

ou $m \notin \{-1, 3\}$ et $x = \frac{m(m+1)}{(m-3)(m+1)} = \frac{m}{m-3}$ et $x \in \left\{ \frac{m}{m-3} \right\}$

b) $\frac{x+m}{m-1} - \frac{x-m}{m+1} = \frac{mx-8}{1-m^2}$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m = 1$ ou $m = -1$ et $x \in \emptyset$

ou $m \notin \{-1, 1\}$ et $\frac{x+m}{m-1} - \frac{x-m}{m+1} + \frac{mx-8}{m^2-1} = 0$

et $\frac{(x+m)(m+1) - (x-m)(m-1) + (mx-8)}{(m-1)(m+1)} = 0$

et $mx + x + m^2 + m - mx + x + m^2 - m + mx - 8 = 0$

et $2x + mx = -2m^2 + 8$

et $(2+m)x = -2(m^2-4) = -2(m-2)(m+2)$

et $m = -2$ et $0 \cdot x = 0$ et $x \in \mathbb{R}$

ou $m \neq -2$ et $x = \frac{-2(m^2-4)}{2+m} = \frac{-2(m-2)(m+2)}{m+2}$

c) $a(x-a^2) = b(x-b^2)$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow ax - a^3 = bx - b^3$

$\Leftrightarrow ax - bx = a^3 - b^3$

$\Leftrightarrow (a-b)x = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\Leftrightarrow a = b$ et $0 \cdot x = 0$ et $x \in \mathbb{R}$

ou $a \neq b$ et $x = a^2 + ab + b^2$ et $x \in \{a^2 + ab + b^2\}$

2) a) $f(x) = \frac{x}{x+1} - \frac{2}{x} - \frac{x^2}{x^2+x}$ et $x \in \mathbb{R} - \{-1; 0\}$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} - \frac{2}{x} - \frac{x^2}{x^2+x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x \cdot x - 2(x+1) - x^2}{(x+1)(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \quad (\notin D_f)$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

b) $f(x) = \frac{2x+1}{x+3} - \frac{x+1}{x-4} - \frac{5(1-2x)}{x^2-x-12}$ et $x \in \mathbb{R} - \{-3; 4\}$

$$\text{car } x^2-x-12 = (x-4)(x+3)$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{(2x+1)(x-4) - (x+1)(x+3) - 5(1-2x)}{(x+3)(x-4)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + x - 4 - x^2 - 3x - x - 3 - 5 + 10x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x=4 \quad (\notin D_f) \\ \text{ou} \\ x=-3 \quad (\notin D_f) \end{matrix} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

3) a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ et $x \in \mathbb{R}$ $f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{1; 3; -2\}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & +6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

b) $f(x) = (x-3)(x^2-6) - (3-x)(2x+3) + (4x-12) = 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (x-3)[(x^2-6) + (2x+3) + 4] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{3; -1\}$$

c) $f(x) = -6x^2 - x + 15 = 0$ et $x \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} m+m = +1 \\ m \cdot m = 6 \cdot (-15) = -2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + x - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 10x - 9x - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(3x+5) - 3(3x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x+5)(2x-3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{5}{3}; \frac{3}{2} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \\ m = -9 \end{cases}$$