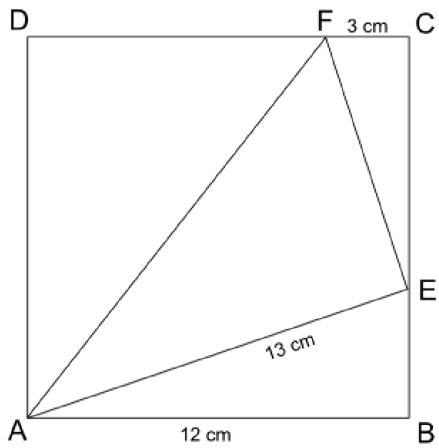
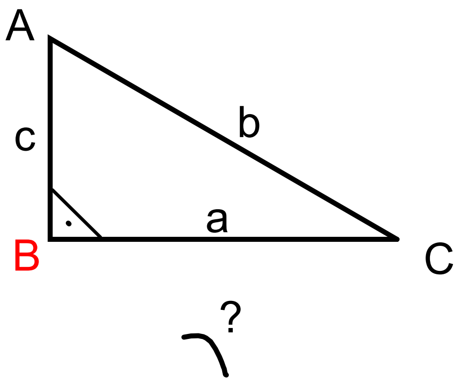
Exercice 17: Soit $ABCD$ un carré avec $AB = 12$ cm, $CF = 3$ cm et $AE = 13$ cm. Le triangle AEF est-il rectangle ?



Énoncé de la réciproque de Pythagore :

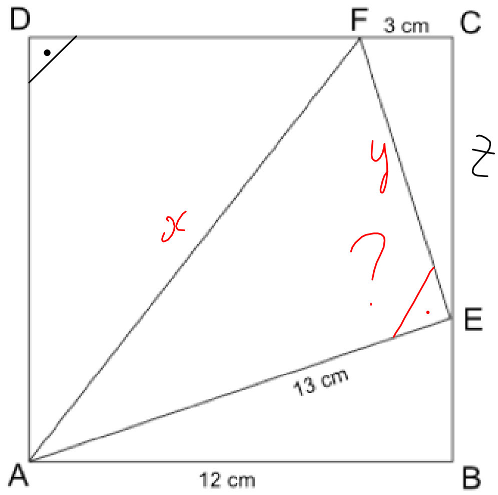


$a^2 + c^2 = b^2 \Rightarrow (AB) \perp (BC)$

où a = BC, b = AC et c = AB

Données :

* un carré ABCD
* $AB = 12$
* $E \in [B, C]$ et $AE = 13$
* $F \in [D, C]$ et $FC = 3$



Résolution : a-t-on $(AE) \perp (EF)$?

Si oui, on a Pythagore dans le triangle ΔAEF :

$$AF^2 = AE^2 + EF^2$$

Calculons $\overset{?}{AF} = x$ et $\overset{?}{EF} = y$:

Calcul de $y = EF$ dans le triangle ΔEFC (rectangle en C)

on a, par Pythagore :

$$EF^2 = EC^2 + FC^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = EC^2 + 9 \quad \text{où } EC = z \text{ à calculer}$$

* calcul de $z = EC$:

dans le triangle ΔABE rectangle en B :

$$AE^2 = AB^2 + BE^2$$

donc $$13^2 = 12^2 + BE^2$$

$$\Leftrightarrow BE^2 = 13^2 - 12^2 = (13-12)(13+12) = 25$$

$$\Leftrightarrow BE = \pm 5$$

d'où $z = CE = CB - BE = 12 - 5 = 7$

et ainsi $y^2 = EC^2 + 9 = 49 + 9 = 58$

* Calcul de $x = AF$:

$x^2 = AF^2 = DF^2 + AD^2$ par Pyth. dans le triangle ΔAFD rectangle en D

où $DF = DC - FC = 12 - 3 = 9$

et $AD = 12$

ainsi $x^2 = 9^2 + 12^2 = 3^2(3^2 + 4^2) = 9 \cdot 25 = (3 \cdot 5)^2$

$\Leftrightarrow x = \cancel{\pm}\, 15$

Alors : $AF^2 = AE^2 + EF^2$?

$\Leftrightarrow 15^2 = 13^2 + 58$

$\Leftrightarrow 15^2 - 13^2 = 58$

$\Leftrightarrow (15 - 13)(15 + 13) = 58$

$\Leftrightarrow 2 \cdot 28 = 58$ faux !

donc la réciproque de Pythagore ne s'applique pas...

et le triangle AEF n'est pas rectangle en E.

* <u>La trigonométrie</u> du triangle rectangle :

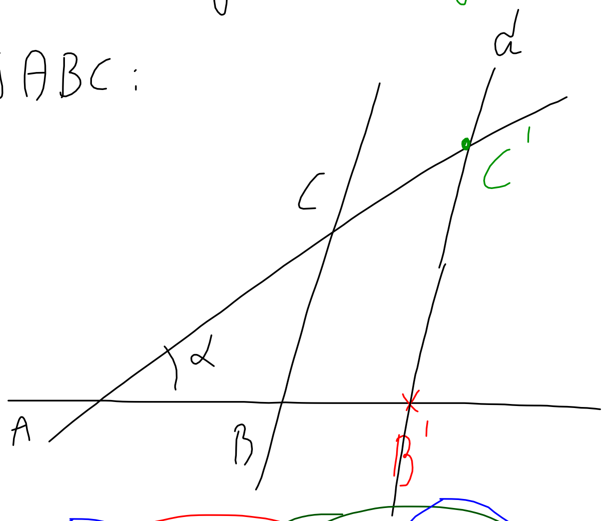
* Soit un triangle ΔABC :

et $B' \in (AB)$

et $d \ni B'$

et $d \parallel (BC)$

et $C' \in d \cap (AC)$



donc, par Thalès, on a : $\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{AC'}$

$\Longleftrightarrow \frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'}$ et $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{AC'}$, et $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$

$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{B'C'}{AB'} = \frac{BC}{AB}}$ (a) et $\boxed{\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}}$ (e) et $\boxed{\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}}$ (c)

Soit $\measuredangle \alpha = \measuredangle CAB = \measuredangle C'AB'$

Si le triangle ΔABC est rectangle en B :

... suite ... jeudi 28 mai