2 Méthode des déterminants

Théorème de Cramer :

Soit le système "canonique" : $\begin{cases} ax+by=c \\ \text{et} \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

et $0 \notin \{a ; b ; a' ; b'\}$

Ainsi, par combinaisons linéaires :

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \begin{matrix} a' \\ -a \end{matrix} \begin{matrix} -b' \\ b \end{matrix} \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} aa'x+a'by=a'c \\ -aa'x-ab'y=-ac' \end{cases}$$

ou

$$\begin{matrix} L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} -ab'x-bb'y=-b'c \\ a'bx+bb'y=bc' \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1+L_2 \\ \iff \\ L_3+L_4 \end{matrix} \begin{cases} 0\cdot x+(a'b-ab')y=a'c-ac' \\ \text{et} \\ (-ab'+a'b)x+0\cdot y=-b'c+bc' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (ab'-a'b)y=(ac'-a'c) \\ \text{et} \\ (ab'-a'b)x=(b'c-bc') \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} D\cdot x=b'c-bc'=D_x \\ \text{et} \\ D\cdot y=ac'-a'c=D_y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} D\neq 0 \text{ et } x=\dfrac{D_x}{D} \text{ et } y=\dfrac{D_y}{D} \\ \quad \text{et } (x;y)\in\left\{\left(\dfrac{D_x}{D};\dfrac{D_y}{D}\right)\right\} \\ \text{ou} \\ D=0 \text{ et } \begin{cases} 0x=D_x \\ 0\cdot y=D_y \end{cases} \end{cases}$$

et $D_x\neq 0$ ou $D_y\neq 0$ et $(x;y)\in\emptyset$

(le système est dit impossible)

ou $D_x=0$ et $D_y=0$

et $\begin{cases} 0\cdot x=0 \\ 0\cdot y=0 \end{cases}$ et $(x;y)\in\{\ldots ?\ldots\}$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

(le système est dit indéterminé)

Exercice 7 de la page 4

13 $\begin{cases} \frac{5(x+y)}{3} = 15 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 2x + y + 7 = -7 - 3y \\ 4x + 4y + 4 = x - 7 \end{cases}$

15 $\begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{x-y}{3} \\ x + 4y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

16 $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{12} \end{cases}$

17 $\begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y-2} = \frac{7}{12} \\ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y-2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$

18 $\begin{cases} x + \frac{8}{y-1} = -3 \\ -2x + \frac{12}{y-1} = -3 \end{cases}$

19 $\begin{cases} \frac{7}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = \frac{3}{14} \end{cases}$

20 $\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{3}{4} \\ \frac{x-y}{xy} = \frac{1}{4} \end{cases}$

21 $\begin{cases} 2(x+2y) = 0 \\ -3(-y+3x) = 0 \end{cases}$

22 $\begin{cases} \frac{x}{3} = 2y - 1 \\ 3 = 2y - x \end{cases}$

23 $\begin{cases} \frac{x}{3} - 5y + 8 = \frac{x}{2} - 3 \\ \frac{y}{2} - \frac{x}{3} + 4 = y + 1 \end{cases}$

24 $\begin{cases} 2y + 3x - \frac{43}{12} = 0 \\ -5x + 3y = -\frac{7}{4} \end{cases}$

25 $\begin{cases} 2x + (m-1)y = 1 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

26 $\begin{cases} mx + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

27 $\begin{cases} 5x - 2y = m \\ 2x + 3y = 17 \end{cases}$

28 $\begin{cases} (m+2)x + y = 1 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$

29 $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx + 3y = 3 \end{cases}$

30 $\begin{cases} x + 4y = m + 3 \\ 7x - y = 1 \end{cases}$

31 $\begin{cases} x + y = 3 \\ mx - 2y = 5 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 2(x+2y) = 0 \\ -3(-y+3x) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ 3x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \\ \text{et } (x;y) \in \{(0;0)\} \end{cases}$

exercice 7 : (24)

24) $\begin{cases} 2y + 3x - \frac{43}{12} = 0 \\ -5x + 3y = -\frac{7}{4} \end{cases}$ et $(x;y) \in \mathbb{R}^2 \iff \begin{cases} 3x + 2y = \frac{43}{12} \\ -5x + 3y = \frac{-7}{4} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 36x + 24y = 43 \\ -20x + 12y = -7 \end{cases}$

$\iff D = \begin{vmatrix} 36 & 24 \\ -20 & 12 \end{vmatrix} = 36 \cdot 12 - (-20) \cdot 24$

$= 24(18 + 20) = 24 \cdot 38 \neq 0$

et

$D_x = \begin{vmatrix} 43 & 24 \\ -7 & 12 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 43 & 2 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}$

$= 12 \cdot (43 + 14) = 12 \cdot 57$

et

$D_y = \begin{vmatrix} 36 & 43 \\ -20 & -7 \end{vmatrix} = 36 \cdot (-7) - (-20) \cdot 43$

$= 4\left(9 \cdot (-7) + 5 \cdot 43\right)$

$= 4 \cdot (-63 + 215)$

$= 4 \cdot 152$

et $x = \frac{D_x}{D} = \frac{12 \cdot 57}{24 \cdot 38} = \frac{3}{4}$

$y = \frac{4 \cdot 152}{24 \cdot 38} = \frac{2}{3}$

$\iff (x;y) \in \left\{\left(\frac{3}{4} ; \frac{2}{3}\right)\right\}$

exercice 7 :

24 $\begin{cases} 2y + 3x - \frac{43}{12} = 0 \\ -5x + 3y = -\frac{7}{4} \end{cases}$

25 $\begin{cases} 2x + (m-1)y = 1 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

26 $\begin{cases} mx + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

27 $\begin{cases} 5x - 2y = m \\ 2x + 3y = 17 \end{cases}$

28 $\begin{cases} (m+2)x + y = 1 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$

29 $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx + 3y = 3 \end{cases}$

30 $\begin{cases} x + 4y = m+3 \\ 7x - y = 1 \end{cases}$

31 $\begin{cases} x + y = 3 \\ mx - 2y = 5 \end{cases}$

26 $\begin{cases} mx + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ et $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} mx + (2x-1) = 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \text{ et } (x;y) \in \emptyset \\ \text{ou} \\ m \neq -2 \text{ et } (x;y) \in \left\{\left(\frac{3}{m+2}; \frac{4-m}{m+2}\right)\right\} \end{cases}$

$mx + (2x-1) = 2$

$\Leftrightarrow mx + 2x = 3$

$\Leftrightarrow (m+2)x = 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \text{ et } 0x = 3 \\ \quad \text{et } x \in \emptyset \\ \text{ou} \\ m \neq -2 \text{ et } x = \frac{3}{m+2} \end{cases}$

$y = 2\left(\frac{3}{m+2}\right) - 1$

$= \frac{6 - m - 2}{m+2}$

$= \frac{4-m}{m+2}$

29 $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx + 3y = 3 \end{cases}$ et $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow \quad D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 3 \end{vmatrix} = 3 - m^2 = (\sqrt{3})^2 - m^2 = (\sqrt{3} - m)(\sqrt{3} + m)$

$D_x = \begin{vmatrix} 2 & m \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 3m = 3(2-m)$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ m & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2m$

et $m = \sqrt{3}$ et $D = 0$ et $D_x = 3(2-\sqrt{3}) \neq 0$ et $(x;y) \in \emptyset$

(et $D_y = 3 - 2\sqrt{3} \neq 0$)

ou

$m = -\sqrt{3}$ et $D = 0$ et $D_x = 3(2+\sqrt{3}) \neq 0$ et $(x;y) \in \emptyset$

ou

$m \notin \{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$ et $D \neq 0$ et $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{3(2-m)}{3-m^2}$

et $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{3-2m}{3-m^2}$

et $(x;y) \in \left\{\left(\dfrac{3(2-m)}{3-m^2}; \dfrac{3-2m}{3-m^2}\right)\right\}$

Exercice 11 :

Résoudre les systèmes d'équations paramétriques suivantes :

1 $\begin{cases} 2x + (m-1)y = 1 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$ 2 $\begin{cases} 2mx + y = 3 \\ \frac{x}{3} - y = 1 \end{cases}$ 3 $\begin{cases} 4x + 2y = m \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

4 $\begin{cases} (m+2)x + y = 2 \\ (m+2)y + x = 4 \end{cases}$ 5 $\begin{cases} (m^2+1)x + y = 0 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ 6 $\begin{cases} x + my = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

à faire pour demain vendredi 3 avril
l'exercice 11 les n° 3 - 4

① $\begin{cases} 2x + (m-1)y = 1 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$ et $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow D = \begin{vmatrix} 2 & m-1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4(m-1) = 4\left[1-(m-1)\right]$

$= 4(1-m+1) = -4m$

$D_x = \begin{vmatrix} 1 & m-1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 7(m-1) = 2 - 7m + 7$

$= -7m + 9$

$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 4 = 10$

et $m \neq 0$ et $D \neq 0$ et $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-7m+9}{-4m} = \frac{7m-9}{4m}$

et $y = \frac{D_y}{D} = \frac{10^{\,5}}{-4m_{\,-2}} = \frac{-5}{2m}$

et $(x;y) \in \left\{\left(\frac{7m-9}{4m}; \frac{-5}{2m}\right)\right\}$

ou

$m = 0$ et $D = 0$ et $D_x = 9 \neq 0$ $\left(\text{et } D_y = 10 \neq 0\right)$

et $(x;y) \in \emptyset$ (le système est impossible)