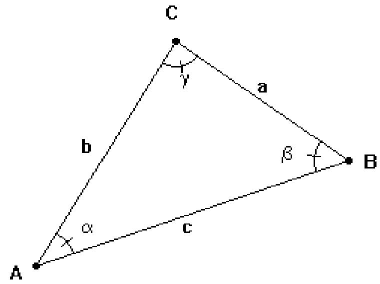
Exercices de mathématique

(Trigonométrie du triangle rectangle - 3)



1) Un triangle ΔABC étant donné, on notera les longueurs des côtés : $a = \delta(B,C) = BC$, $b = \delta(A,C) = AC$ et $c = \delta(A,B) = AB$
et les angles $\sphericalangle CAB = \sphericalangle\ \alpha$ et $\mu_d(\sphericalangle\ \alpha) = \alpha$,
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle\ \beta$ et $\mu_d(\sphericalangle\ \beta) = \beta$ et
$\sphericalangle BCA = \sphericalangle\ \gamma$ et $\mu_d(\sphericalangle\ \gamma) = \gamma$.

   a) On donne $\alpha = 90°$, $\gamma = 32{,}5°$ et $c = 4{,}5$, calculer β, a et b.

   b) On donne $\beta = 90°$, $a = 4$ et $b = 7$, calculer c , α et γ .

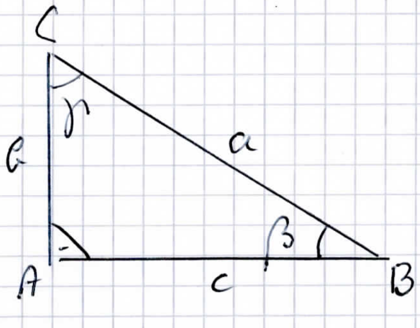
2) On donne un triangle ΔABC et $C' = p_\perp(C) \in (AB)$ le pied de la hauteur issue du point C.
si $\alpha = 25°$, $h = CC' = \delta(C,C') = 3$ et $c = AB = 8$, calculer AC' et $\mu_d(\sphericalangle\ BCC') = \delta$.

3) Une route s'élève régulièrement en formant avec l'horizontale un angle de 3,2°.
De combien s'est-on élevé après avoir parcouru 7,5 km sur la route ?

Pour chaque question, on demande de faire une figure d'étude claire

Série ③

1) a) Données : $\begin{cases} * \text{ un triangle } ABC \\ * \sphericalangle\alpha = \sphericalangle BAC \text{ et } \alpha = 90^\circ \\ \quad \sphericalangle\gamma = \sphericalangle ACB \text{ et } \gamma = 32{,}5^\circ \\ * \; c = AB = 4{,}5 \\ * \text{ calculer } \beta, \; a \text{ et } b \end{cases}$



Résolution :

* On a : $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$\Leftrightarrow \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$

$= 180^\circ - 90^\circ - 32{,}5^\circ = 90^\circ - 32{,}5^\circ = 57{,}5^\circ$

* On a : $\tan(\gamma) = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow b = \frac{c}{\tan(\gamma)}$

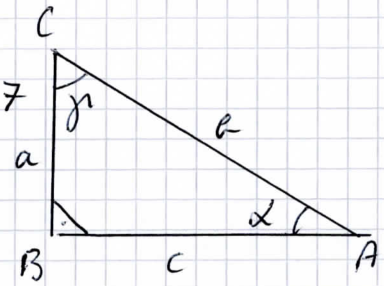
$\sin(\gamma) = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

applications numériques :

$b = \frac{c}{\tan(\gamma)} = \frac{4{,}5}{\tan(32{,}5^\circ)} = 7{,}06$

$a = \frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{4{,}5}{\sin(32{,}5^\circ)} = 8{,}38$

1b) Données : $\begin{cases} * \text{ un triangle } ABC \\ * \; \beta = 90^\circ, \; a = BC = 4 \text{ et } b = AC = 7 \\ * \text{ calculer } c, \; \alpha \text{ et } \gamma \end{cases}$



Résolution :

* On a : Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Leftrightarrow b^2 = c^2 + a^2 \Leftrightarrow c^2 = b^2 - a^2$

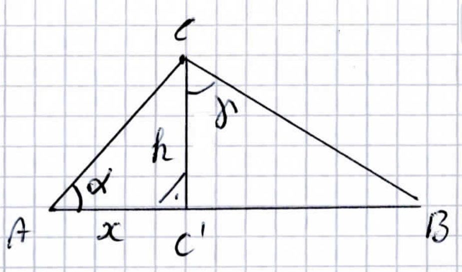
a.n. : $c^2 = b^2 - a^2 = 7^2 - 4^2 = (7-4)(7+4) = 3 \cdot 11 = 33 \Leftrightarrow c = \sqrt{33}$ (>0)

* On a : $\cos(\alpha) = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{33}}{7} \Leftrightarrow \alpha \cong 34{,}85^\circ$

puis $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 34{,}85^\circ - 90^\circ =$

$90^\circ - 34{,}85^\circ = 55{,}15^\circ$

2) Données : $\begin{cases} * \text{ un triangle } ABC \\ * \ C' = p_\perp(C) \in (AB) \\ * \ \alpha = 25^\circ, \ h = CC' = 3 \\ \quad c = AB = 8 \\ * \text{ calculer } AC' \text{ et } \delta = \mu_d(\measuredangle BCC') \end{cases}$



Résolution : Dans le triangle $AC'C$, rectangle en C' on a :

$$\tan(\alpha) = \frac{CC'}{AC'} \Leftrightarrow x = AC' = \frac{CC'}{\tan(\alpha)} = \frac{3}{\tan(25^\circ)} \cong 6{,}43$$

* De plus $AB = AC' + C'B \Leftrightarrow C'B = AB - AC' = 8 - \frac{3}{\tan(25^\circ)} \cong 1{,}57$

d'où $\tan(\gamma) = \frac{C'B}{CC'} = \frac{1{,}57}{3} \Leftrightarrow \gamma \cong 27{,}57^\circ$

remarque : si $\measuredangle\beta = \measuredangle ABC$, alors $\beta = 90^\circ - \gamma \cong 62{,}43^\circ$

et si $\measuredangle\gamma = \measuredangle BCA$, alors $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \cong 92{,}57^\circ$

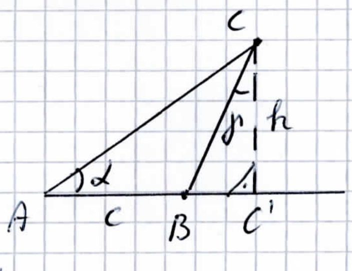
donc le triangle ABC n'est pas rectangle en C

remarque : on donne $C' = p_\perp(C) \in (AB)$: a-t-on $C' \in [A,B]$, comme ci-dessus, ou a-t-on $C' \notin [A,B]$?

On donne $c = AB = 8$

on a calculé :

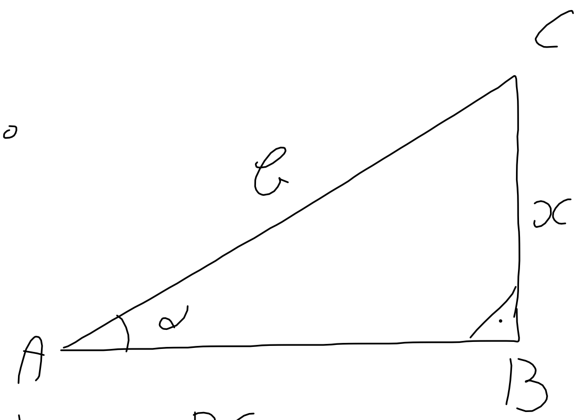
$$AC' \cong 6{,}43 < AB = 8$$



donc on n'a pas cette situation où $B \in [A, C']$

3) Une route s'élève régulièrement en formant avec l'horizontale un angle de 3,2°. De combien s'est-on élevé après avoir parcouru 7,5 km sur la route ?

Données:
$$\begin{cases} * \; A \notin (BC) \\ * \; \alpha = 3{,}2^\circ \\ * \; AC = b \\ \quad = 7{,}5 \text{ km} \end{cases}$$



Résolution: calcul de $x = BC$:

$$\sin(\alpha) = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{b}$$

$$\Leftrightarrow x = b \cdot \sin(\alpha)$$

a.M.: $x = 7{,}5 \cdot \sin(3{,}2^\circ) \cong 0{,}41866$ km

réponse: $x = 418{,}66$ m