Examen de mathématique – 5

(Géométrie vectorielle)

1) Compléter les « … » avec les notions vues au cours :

5

1 a) $(A,B) \sim (C,D)$ $\Leftrightarrow$ …

1 b) $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$, où $k \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ …

1 c) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$ …

1 d) ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ …

1 e) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow$ …

2) Est-ce vrai ou faux ? Si l'écriture est vraie, justifier avec le cours ; sinon, corriger l'écriture.

8

2 a) $(C,D) \in \overrightarrow{CD}$ 2 b) $\vec{v} \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$

2 c) $\{A,B\} \subset \overrightarrow{AB}$ 2 d) $\overrightarrow{AB} \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}$

3) Soit les points $\{A,B,C,D,E\} \subset \mathbb{P}$. En détaillant les étapes :

7

3 a) simplifier le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DE}$.

4 b) simplifier le vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})$

5

4) Si $A \notin (BC)$, construire le point M tel que :
(expliquer clairement la démarche et illustrer d'une figure)

$$\overrightarrow{AM} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$$

figure : 2
explications : 3

4

5) Démontrer : (Poser $\boxed{H}$, $\boxed{T}$, $\boxed{D}$) 1 3 $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}_2,\ 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

8

6) Soit $A \notin (BC)$ et M_1 milieu de [A,B] et M_2 milieu de [A,C], démontrer que $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{M_1M_2}$.
(Poser $\boxed{H}$, $\boxed{T}$, $\boxed{D}$ et faire une figure d'étude)
(indication : s'inspirer de la démonstration du problème de Varignon)

total 37 points

1) Compléter les « … » avec les notions vues au cours :

5

1 a) (A,B) ~ (C,D) ⇔ … $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

1 b) $\overrightarrow{AB} = k\cdot\overrightarrow{AC}$, où $k\in\mathbb{R}$ ⇔ … A, B et C alignés

1 c) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ ⇔ … $(A,B) \in \vec{v}$

1 d) ABCD est un parallélogramme ⇔ … $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

1 e) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ⇔ … $\overrightarrow{AB} = k\cdot\overrightarrow{CD}$, $k\in\mathbb{R}$

2)

8

2 a) $(C,D) \in \overrightarrow{CD}$ vrai 1 par définition 1

2 b) $\vec{v} \in \mathbb{P}\times\mathbb{P}$ faux 1 mais $\vec{v} \subset \mathbb{P}\times\mathbb{P}$ vrai 1

2 c) $\{A,B\} \subset \overrightarrow{AB}$ faux 1 mais $(A,B) \in \overrightarrow{AB}$ 1

2 d) $\overrightarrow{AB} \subset \mathbb{P}\times\mathbb{P}$ vrai 1 car $\overrightarrow{AB}$ est un ensemble de bipoints 1

3) $\{A,B,C,D,E\} \subset \mathbb{P}$

3

a) $\vec{w} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DE}$

2

$= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{ED}$ Thm 7

$= \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{ED}$ Charles

$= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED}$ Thm 7

$= \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ Charles

1

7

4

b) $\vec{u} = 2\overrightarrow{DA} - \cancel{3}\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})$ Thm 7-9

2

$= 2\overrightarrow{DA} + \cancel{3}\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB}$ Thm 9

$= (2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DA}) + (3\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{DC}) + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB}$ Thm 7 et Charles

$= 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CB}$ Charles et Thm 7-9

$= 2\overrightarrow{BB} + (2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{BC}$ Charles

$= \vec{0} + 2\overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BC}$ Thm 7

$= \vec{0} + \vec{0} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}$

2

$\vec{u} = 2\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})$

$= 2\overrightarrow{DA} + \underbrace{\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB}$

$= 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB}$

$= (2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CB}$

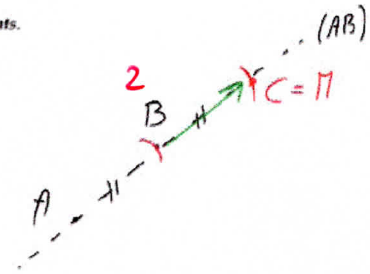
$= 2\overrightarrow{DB} + \underbrace{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{CB}$

$= 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$ (réponse finale)

Exercices

4) 31) Si $A \notin (BC)$, dessiner M dans les cas suivants.

a) $\vec{AM} = 2\,\vec{AB}$



$\Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{AC}$ } déf (5)

3 par déf. et $\begin{cases} C \in (AB) \\ \text{et} \\ C \in [AB) \quad (\text{car } 2>0) \\ \text{et} \\ AC = 2 \cdot AB \end{cases} \Leftrightarrow M = C$

5

ou 4) ou, autre méthode :

(3)

$$\left.\begin{aligned} & \vec{AM} = 2\cdot\vec{AB} \\ \Leftrightarrow\ & \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AB} \\ \Leftrightarrow\ & \vec{AM} - \vec{AB} = \vec{AB} \\ \Leftrightarrow\ & \vec{AM} + \vec{BA} = \vec{AB} \\ \Leftrightarrow\ & \vec{BA} + \vec{AM} = \vec{AB} \\ \Leftrightarrow\ & \vec{BM} = \vec{AB} \end{aligned}\right\} \text{E.V}$$

$\Leftrightarrow M = S_B(A)$ (car B milieu de [A,M])

$\Leftrightarrow M = t_{\vec{AB}}(B)$

5) 1 $\begin{cases} (H) & \vec{u} \in V_2 \\ (T) & 1 \cdot \vec{u} = \vec{u} \end{cases}$

4

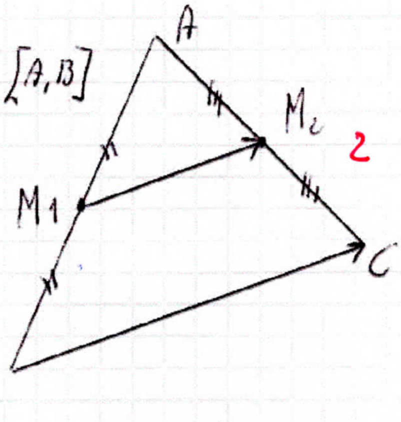
3 $\begin{cases} (D) & \text{si } \vec{u} = \vec{AB} \text{ et } 1\cdot\vec{u} = \vec{v} = \vec{AC} \\ \text{déf.} \Leftrightarrow & C \in (AB) \text{ et } C \in [AB) \text{ et } AC = 1\cdot AB = AB \\ \Leftrightarrow & C = B \\ \text{donc} & \vec{v} = \vec{AC} = \vec{AB} = \vec{u} \qquad \text{cqfd} \end{cases}$

6) (H) $A \notin (BC)$, M_1 milieu de $[A,B]$

1 M_2 milieu de $[A,C]$

2

(T) 1 $\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{M_1M_2}$



2

(D) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ (Chasles)

1

$= 2\,\overrightarrow{M_1A} + 2\,\overrightarrow{AM_2}$

1

(par (H))

4

Thm 9

$= 2\,(\overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{AM_2})$ 1 $= 2\,\overrightarrow{M_1M_2}$ (par Chasles)

1

cqfd

8