Chapitre 4 : Systèmes d'équations

1 Méthodes de résolution

Exemples de méthodes utilisées pour résoudre des systèmes

1 Méthode de comparaison

2 Méthode de substitution

3 Méthode des combinaisons linéaires

théorème de référence pour le raisonnement

THEOREME 1

$$\begin{cases} a = b \\ \text{et} \\ c = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = b + d \\ \text{et} \\ c = d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b \\ \text{et} \\ c = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot a = x \cdot b \\ \text{et} \\ y \cdot c = y \cdot d \end{cases} \quad \text{et} \quad 0 \notin \{x, y\}$$

Exercice 6 *Résoudre dans* $\mathbb{R}^2$

1 $\begin{cases} 16x + 4y = 15 \\ \text{et} \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ \text{et} \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x + 4y = 1 \\ \text{et} \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x + y = 3 \\ \text{et} \\ x - y = 2 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 6x - 9y = 0 \\ \text{et} \\ 8x + 15y = 9 \end{cases}$

6 $\begin{cases} -4x + 5y = 2 \\ \text{et} \\ 12x + 10y = 56 \end{cases}$

2 Méthode de substitution

1 $\begin{cases} 16x + 4y = 15 \\ \text{et} \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$ et $(x;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{15-16x}{4} \\ 5x - 4\left(\dfrac{15-16x}{4}\right) = 8 \end{cases}$$

$$5x - \cancel{4}\left(\frac{15-16x}{\cancel{4}}\right) = 8$$

$$\Leftrightarrow 5x - 15 + 16x = 8$$

$$\Leftrightarrow 21x = 23$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{23}{21}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{15 - 16\cdot\left(\frac{23}{21}\right)}{4} = \dfrac{-53}{84} \\ x = \dfrac{23}{21} \end{cases}$$

$$y = \frac{15 - 16\cdot\left(\frac{23}{21}\right)}{4} = \frac{\frac{15\cdot 21 - 16\cdot 23}{21}}{4} = \frac{315 - 368}{4\cdot 21} = \frac{-53}{84}$$

$$\Leftrightarrow (x;y) \in \left\{ \left(\frac{23}{21} ; \frac{-53}{84}\right) \right\}$$

ou autrement :

(1) $\begin{cases} 16x + 4y = 15 \\ \text{et} \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$ et $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{15-4y}{16} \\[2ex] x = \dfrac{8+4y}{5} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8+4y}{5} \\[2ex] \dfrac{15-4y}{16} = \dfrac{8+4y}{5} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8 + \cancel{4}\left(\dfrac{-53}{\cancel{84}\,21}\right)}{5} = \dfrac{\dfrac{168-53}{21}}{5} = \dfrac{\cancel{115}}{\cancel{5}\cdot 21} = \dfrac{23}{21} \\[3ex] y = \dfrac{-53}{84} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (x;y) \in \left\{\left(\frac{23}{21} ; \frac{-53}{84}\right)\right\}$$

2) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$ et $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow$ (par comparaison)

$\begin{cases} 2x = 1 - y \\ 2x = 3 - 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - y = 3 - 5y \\ 2x = 1 - y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y = +2 \quad \text{et } y = +\frac{1}{2} \\ 2x = 1 - \left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et } x = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) \in \left\{\left(\frac{1}{4} ; +\frac{1}{2}\right)\right\}$

3 Méthode des combinaisons linéaires

$$3 \quad \begin{cases} x + 4y = 1 \\ \text{et} \\ 2x + y = 3 \end{cases} \begin{array}{|c|c} 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{array} \quad \text{et } (x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot x + 7y = -1 \\ -7x + 0 \cdot y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-1}{7} \\ x = \frac{-11}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x;y) \in \left\{ \left(\frac{-11}{7} ; \frac{-1}{7} \right) \right\}$$

exercice 6

③ $\begin{cases} x + 4y = 1 & (1) \\ 2x + y = 3 & (2) \end{cases}$ et $(x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

appelons (1) l'équ. $x+4y=1$
(2) l'équ. $2x+y=3$

---

calculons :

$2\cdot(1) + (-1)(2)$:

$2(x+4y) + (-1)\cdot(2x+y) = 2\cdot1 + (-1)\cdot3$

$\Leftrightarrow \quad 2x + 8y - 2x - y = -1$

$\Leftrightarrow \quad 0\cdot x + 7y = -1$

de même : $1\cdot(1) + (-4)\cdot(2)$:

$1\cdot(x+4y) + (-4)(2x+y) = 1\cdot1 + (-4)\cdot3$

$\Leftrightarrow \quad x + 4y - 8x - 4y = -11$

$\Leftrightarrow \quad -7x + 0\cdot y = -11$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\cdot x + 7y = -1 \\ -7x + 0y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-1}{7} \\ x = \frac{11}{7} \end{cases}$ (et non $-\frac{11}{7}$ dans le script)

$\Leftrightarrow \quad (x;y) \in \left\{ \left(\frac{11}{7} ; \frac{-1}{7} \right) \right\}$

Méthode de comparaison

4 $\begin{cases} x + y = 3 \\ \text{et} \\ x - y = 2 \end{cases}$ et $(x ; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ \text{et} \\ x = y + 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3 - y = y + 2 \\ \text{et} \\ x = y + 2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow (x ; y) \in \left\{ \cancel{\left(\frac{1}{2} ; \frac{5}{2}\right)} \; \left(\frac{5}{2} ; \frac{1}{2}\right) \right\}$$

3 Méthode des combinaisons linéaires

5 $\begin{cases} 6x - 9y = 0 \\ \text{et} \\ 8x + 15y = 9 \end{cases}$ et $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ \text{et} \\ 8x + 15y = 9 \end{cases} \begin{array}{|c|c} -4 & 5 \\ \\ 1 & 1 \end{array}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot x + 27y = 9 \\ 18 \cdot x + 0 \cdot y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{9}{27} = \frac{1}{3} \\ x = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x;y) \in \left\{ \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{3} \right) \right\}$

6) $\begin{cases} -4x+5y=2 \\ 12x+10y=56 \end{cases}$ et $(x;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-5y=-2 \\ 6x+5y=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y=4x+2 \\ 5y=28-6x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2=28-6x \\ 5y=4x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x=26 \quad \text{et } x=\frac{26}{10}=\frac{13}{5} \\ 5y=4\cdot\frac{13}{5}+2=\frac{62}{5} \quad \text{et } y=\frac{62}{25} \end{cases}$