VECTEURS DU PLAN

1 Equipollence des bipoints - Vecteurs

Exercices

1 *Qu'est-ce qu'un parallélogramme? Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un quadrilatère convexe soit un parallélogramme.*

2 *Qu'est-ce que la relation de Chasles pour des points alignés? Si* $A \in (BC)$ *avec* $g(A) = 5$ *et* (B,C) *repère de la graduation* g*, calculer* $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ *; comparer* $\overline{AC} + \overline{CB}$ *et* $\overline{AB}$.

3 *Démontrer, pour une graduation* g *de* (AB)*, que l'on a*
M *est le milieu de* $[A,B]$ $\Leftrightarrow$ M milieu du bipoint (A,B) $\Leftrightarrow$ $\overline{AM} = \overline{MB}$ $\Leftrightarrow$ $\overline{MA} + \overline{MB} = 0$ $\Leftrightarrow$ $g(M) = \dfrac{g(A) + g(B)}{2}$.

Définition 1 Deux bipoints (A,B) et (C,D) sont dits **équipollents** si et seulement si (A,D) et (B,C) ont même milieu. La relation ainsi définie dans l'ensemble des bipoints du plan se nomme **équipollence**.

Notation: $(A,B) \sim (C,D)$

Exercices

4 *Si* $(A,B) \sim (C,D)$ *et* $C \in (AB)$, *montrer que* $C \neq D$ *et que* $D \in (AB)$. *L'équipollence implique-t-elle l'alignement?*

5 *Si* $\{A, B, C, D\} \subset d$, *déterminer* $g(D)$ *dans le cas où* (A,B) *est le repère de* g , $g(C) = \frac{7}{2}$ *et* $(B,A) \sim (C,D)$. *Calculer l'abscisse du milieu de* (B,D) *et de* (A,C) .

6 *Démontrer:*

a) $(A,A) \sim (B,B)$

b) $(A,C) \sim (B,C) \Leftrightarrow A = B$

c) $(A,B) \sim (B,A) \Leftrightarrow A = B$

7 *Si* $(A,B) \sim (C,D)$ *et* $C \notin (AB)$, *que dire de la figure* ABDC ? *Dans l'ensemble des six sommets et du centre d'un hexagone régulier, trouver des bipoints équipollents.*

THEOREME 1 Si $\{A, B, C, D\} \subset d$, alors $(A,B) \sim (C,D)$ si et seulement si $\overline{AB} = \overline{CD}$.

THEOREME 2 $(A,B) \sim (C,D) \Leftrightarrow (A,C) \sim (B,D) \Leftrightarrow (D,B) \sim (C,A)$

THEOREME 3 Les projetés parallèles sur une droite d des deux bipoints équipollents sont des bipoints équipollents.

Exercice 8

Qu'est-ce qu'une relation dans un ensemble, une relation d'équivalence, une partition d'un ensemble? Proposer des exemples.

Définition 2 La **classe d'équivalence** d'un élément a, selon une relation d'équivalence dans un ensemble E, est la partie de E comportant les éléments en relation d'équivalence avec a.

Notation : $Cl_a = \{x \in E \mid x \mathcal{R} a\}$

Exercice 9

Démontrer que pour une relation d'équivalence $\mathcal{R}$*, on a* $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow Cl_a = Cl_b$.

A la suite de cet exercice, on peut donc dire qu'une classe d'équivalence peut être "représentée" par l'un quelconque de ses éléments; le nom de la classe ne dépend donc pas du représentant choisi dans la classe.

THEOREME 4 A toute relation d'équivalence définie dans un ensemble E peut être associée une partition de E en classes d'équivalence.

Exercices 10

A-t-on une relation d'équivalence et dans quel ensemble? Si oui, , donner les classes d'équivalence dans les cas suivants.

a) pour deux figures $\mathcal{F}_1$ *et* $\mathcal{F}_2$ *du plan,* $\mathcal{F}_1 \mathcal{R} \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \mathcal{F}_1$ *et* $\mathcal{F}_2$ *ont même aire;*

b) pour deux cercles $\mathcal{C}_{(O_1,r_1)}$ *et* $\mathcal{C}_{(O_2,r_2)}$, $\mathcal{C}_{(O_1,r_1)} \mathcal{R} \mathcal{C}_{(O_2,r_2)} \Leftrightarrow r_1 = r_2$;

c) pour deux cercles $\mathcal{C}_{(O_1,r_1)}$ *et* $\mathcal{C}_{(O_2,r_2)}$, $\mathcal{C}_{(O_1,r_1)} \mathcal{R} \mathcal{C}_{(O_2,r_2)} \Leftrightarrow O_1 = O_2$;

d) pour deux cercles $\mathcal{C}_{(O_1,r_1)}$ *et* $\mathcal{C}_{(O_2,r_2)}$, $\mathcal{C}_{(O_1,r_1)} \mathcal{R} \mathcal{C}_{(O_2,r_2)} \Leftrightarrow r_1 = 2r_2$.

Pourquoi le parallélisme est-il une relation d'équivalence? Dans quel ensemble? Quelles sont les classes?

THEOREME 5 L'équipollence des bipoints est une relation d'équivalence dans $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$.

Définition 3 On appelle **vecteur** du plan toute classe d'équivalence selon la relation d'équipollence des bipoints dans $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$.

Notation pour les classes d'équivalence: Si $(A,B) \sim (C,D) \sim (E,F) \sim ...$

$$\vec{v} = \{ (A,B), (C,D), (E,F), ...\} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = ...$$

$$\vec{0} = \{ (A,A), (B,B), (C,C), ...\} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} \quad \text{le vecteur nul}$$

L'ensemble des vecteurs du plan est noté $\mathcal{V}_2 = \{\vec{v}, \vec{0}, \vec{u}, ...\}$

Exercices

11 *Démontrer que* M *est le milieu de* (A,B) *si et seulement si* $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

12 *On donne un parallélogramme* ABCD *et* $(A,A') \sim (B,B')$. *Démontrer que l'on a* $(D,C) \sim (A',B')$ *et* $(D,A') \sim (C,B')$. *On pose* A *milieu de* [D,E]; *démontrer que* $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AE}$ *et* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$.

13 *Démontrer que l'on a:*

a) *Pour* $\mathcal{S}_O$ *une symétrie de centre* O, $(A,B) \sim (\mathcal{S}_O(B), \mathcal{S}_O(A))$.

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BF} \Rightarrow$ B *milieu de* (A,F).

14 *Si* $A \notin (BC)$ *et* D, E, F *sont les projetés respectifs de* A, B, C *sur* d, *comment choisir la projection pour avoir* $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF}$? *Donner une condition nécessaire et suffisante.*

15 *Peut-on avoir* $A \in (BC) \Rightarrow (p_a(A), p_a(B)) \sim (p_a(B), p_a(C))$?

16 *Si* ABCD *est un parallélogramme et* $(A,E) \sim (B,F) \sim (C,G) \sim (D,H)$ *et* O *le milieu de* (C,E), *démontrer:*

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ *et* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH}$

b) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$. *En déduire que* O *est milieu de* (D,F) *et que* {A,B,C,D,E,F,G,H} *admet un centre de symétrie.*

17 *A-t-on* $\{A,B\} \in \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}$, $(C,D) \in \overrightarrow{CD}$, $\vec{v} \in \mathbb{P}$, $\vec{v} \subset \mathbb{P}$?

18 *Démontrer:* $(A,B) \in \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{v}$ *et* $(A,B) \in \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow A = B$.

19 ***Théorème.*** *Si* $(A,B) \in \vec{v}$ *et* $C \in \mathbb{P}$, *alors il existe un et une seul* D *tel que* $(A,B) \sim (C,D)$.

20 *On appelle* ***translation*** *de vecteur* $\vec{v}$ *la relation* $t_{\vec{v}} = (\mathbb{P}, \mathbb{P}, G)$, *où* $(A,A') \in G \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{v}$.

Démontrer que $t_{\vec{v}}$ *est une application et que cette application est bijective.*

Quel nom donner à $t_{\vec{0}}$? *Une translation peut-elle admettre un point fixe?*

21 *On donne le parallélogramme* ABCD *et* $t_{\overrightarrow{AB}}(B) = B'$ *et* $t_{\overrightarrow{AB}}(C) = C'$. *Démontrer*

a) B *est milieu de* (A,B')

b) $C' \in (DC)$

c) $t_{\overrightarrow{AC}}(B) = C'$, $t_{\overrightarrow{BD}}(B') = C$. *Qu'est-ce que* $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$ *et* $t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$?

2 Somme dans $\mathcal{V}_2$

Exercice 22

Qu'est-ce qu'une opération, un groupe? Proposer des exemples dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. *Peut-on parler d'opération dans un ensemble autre qu'un ensemble de nombres?*

THEOREME 6 Si $(A,B) \in \vec{u}$ et $(B,C) \in \vec{v}$, alors la relation de $\mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_2$ vers $\mathcal{V}_2$ telle que $(\vec{u},\vec{v}) \mapsto \vec{w} = \overrightarrow{AC}$ est une application.

Pour démontrer ce théorème, on prouve que pour tout couple il y a au moins une image (1) et pas deux images (2).

1) Pour tout couple $(\vec{u},\vec{v})$ il existe des représentants.

$\forall\ (A',B') \in \vec{u} \quad \exists^* C' \in \mathbf{P} \quad (B',C') \sim (B,C)$

Avec O milieu de (B',C), $C' = \mathcal{S}_O(B)$.

2) $$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}\\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}\\ \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$$

Définition 4 On appelle **addition** ou **somme** dans $\mathcal{V}_2$ l'opération notée $+$ qui, à tout

$(\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_2$ avec $(A,B) \in \vec{u}$ et $(B,C) \in \vec{v}$, associe $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

$(\vec{u},\vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \vec{w}$.

Le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ est appelé **vecteur somme**.

Remarque

L'addition ou la somme est une opération. La somme de deux vecteurs est un vecteur.

THEOREME 7	$(\mathcal{V}_2, +)$ est un groupe commutatif.

Remarques

1 Si $\vec{v}\,'$ est le vecteur opposé de $\vec{v}$, on écrit aussi $\vec{v}\,' = -\vec{v}$

et $\vec{w} + \vec{v}\,' = \vec{w} + (-\vec{v}) = \vec{w} - \vec{v}$

2 $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ et $\vec{v} + \overrightarrow{BA} = \vec{v} + (-\overrightarrow{AB}) = \vec{v} - \overrightarrow{AB}$

3 Le bipoint représentant le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ est la diagonale du parallélogramme construit avec les représentants des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercices

23 ***Théorème de Chasles.*** $\forall M \in \mathbb{P}$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$.

En déduire $\forall M \in \mathbb{P}$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$.

24 *Simplifier:* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{LE} = ?$ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} - \overrightarrow{DB} = ?$

25 *On donne un carré* ABCD. *Construire* E *et* F *si* $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$.

Démontrer que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CF}$; *en déduire que* C,B, E *sont alignés.*

26 *Si* $A \notin (BC)$, *dessiner* M *dans chacun des cas suivants:*

a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$. *Démontrer que* B *est milieu de* (M,C).

c) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. *Démontrer que* ACMB *est un parallélogramme.*

d) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$. *Démontrer que* B *est milieu de* (A,M).

e) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$

f) $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

g) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$

27 *Dans l'ensemble* {A,B,C,D,E,F,O} *des 6 sommets et du centre d'un hexagone régulier, donner un bipoint représentant les vecteurs suivants.*

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF}$ c) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{OC}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO}$ e) $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ f) $\overrightarrow{EO} - \overrightarrow{ED}$

g) $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{OC}$ h) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DE}$ i) $\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{ED}$

28 *Quelle est l'image d'un parallélogramme par une translation* $t_{\vec{v}}$?

29 *Si* $E \notin (FG)$, *démontrer que* G *est milieu de* $(E, t_{\overrightarrow{EG}}(G))$ *et* $(GF) \parallel (t_{\overrightarrow{EG}}(G)\, t_{\overrightarrow{EG}}(F))$.

30 *Si* $\mathcal{T}$ *est l'ensemble des translations, alors* $(\mathcal{T}, \circ)$ *est un groupe commutatif.*

3 Multiplication externe

THEOREME 8 Si $(A,B) \in \vec{u}$ et $(A,C) \in \vec{v}$ avec $\{A, B, C\} \subset d$ et $\overline{AC} = x \cdot \overline{AB}$, alors la relation de $\mathbf{R} \times \mathcal{V}_2$ vers $\mathcal{V}_2$ telle que $(x, \vec{u}) \mapsto \vec{v}$ est une application.

Définition 5 On appelle **multiplication des vecteurs par un réel** l'opération externe notée $\bullet$ telle que pour tout couple $(x, \vec{u}) \in \mathbf{R} \times \mathcal{V}_2$, $(x, \vec{u}) \mapsto \vec{v} = x \cdot \vec{u}$ avec $(A,B) \in \vec{u}$, $(A,C) \in \vec{v}$, $\{A, B, C\} \subset d$ et $\overline{AC} = x \cdot \overline{AB}$.

THEOREME 9 La multiplication des vecteurs par un réel possède les propriétés suivantes

1)	$1 \cdot \vec{v}$	$=$	$\vec{v}$	
2)	$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v})$	$=$	$(\alpha\beta) \cdot \vec{v}$	associativité sur les nombres
3)	$(\alpha + \beta) \cdot \vec{v}$	$=$	$\alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v}$	distributivité sur les nombres
4)	$\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v})$	$=$	$\alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$	distributivité sur les vecteurs

Remarques

S'il n'y a pas de confusion, on écrit aussi: $x \cdot \vec{v} = x\,\vec{v}$

Le produit d'un nombre et d'un vecteur est un vecteur.

La multiplicaton des vecteurs par un réel est une application.

Avec $A \neq B$ et $x \neq 0$, pour $\overrightarrow{AC} = x\,\overrightarrow{AB}$, les points A, B et C sont toujours alignés.

Exercices

31 Si $A \notin (BC)$ *, dessiner* M *dans les cas suivants.*

a) $\vec{AM} = 2\,\vec{AB}$

b) $\vec{AM} = 2\,\vec{AB} + 3\,\vec{BC}$

c) $\vec{CM} = -2\,\vec{BC}$

d) $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{BA} - \frac{2}{3}\vec{BC}$

e) $\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MA}$

f) $-\vec{MA} + 2\,\vec{MC} - 3\,\vec{MB} = \vec{0}$

32 Démontrer que l'égalité est compatible avec la multiplication d'un vecteur par un réel.

33 Démontrer : M *milieu de* (A,B) $\Leftrightarrow$ $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{AB} = 2\,\vec{AM}$

34 Démontrer que l'on a

$0 \cdot \vec{AB} = \vec{0}$

$(-1) \cdot \vec{AB} = \vec{BA} = -\vec{AB}$

$3\,\vec{AB} = \vec{AC} \Rightarrow (-3)\,\vec{AB} = \vec{CA}$

$x \cdot \vec{AB} = \vec{AC} \Rightarrow (-x)\,\vec{AB} = \vec{CA}$

35 Démontrer qu'un translation de vecteur $\vec{v}$ *transforme un segment en un segment et une droite en une droite qui lui est parallèle.*

THEOREME 10 Si $\vec{0} \notin \{\vec{AB}, \vec{CD}\}$, alors $\vec{AB} = \alpha \cdot \vec{CD} \Leftrightarrow (AB) \parallel (CD)$.

Définition 6 Pour $\vec{0} \notin \{\vec{u}, \vec{v}\}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits de **même direction** si et seulement si $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$ ou $\vec{v} = \beta \cdot \vec{u}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits de **même sens** si et seulement si $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$ et $\alpha > 0$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits de **sens contraires** si et seulement si $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$ et $\alpha < 0$

Exercices

36 *Donner quelques vecteurs de même direction, de même sens, de sens contraires dans les cas suivants.*

a) *Pour un losange* ABCD *de centre* O *avec* $\mathcal{S}_D(A) = A'$, $\mathcal{S}_D(B) = B'$, $\mathcal{S}_D(C) = C'$.

b) *Pour un trapèze* ABCD *avec* $(AB) \parallel (CD)$ *et* $\mathcal{S}_{(AB)}(D) = D'$ *et* $\mathcal{S}_{(AB)}(C) = C'$.

37 *Si* $A \notin (BC)$ *et* $\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{CD}$ *et* $\vec{CD} = 2\,\vec{BE}$, *dessiner* D *et* E. *Démontrer:*

a) $(AB) \parallel (CD)$.

b) $\vec{AB}$ *et* $\vec{EA}$ *sont de sens contraires.*

c) B *est milieu de* (A,E) *et* ACDE *parallélogramme.*

38 *Si* $A \notin (BC)$, M_1 *milieu de* (A,C) *et* M_2 *milieu de* (B,C), *démontrer:*

a) $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{M_1M_2}$ *(quel est ce théorème?)*

b) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_2} \Rightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM_1}$ *(quel est ce théorème?)*

39 *Démontrer:*

a) I *est le milieu de* (A,B) *si et seulement si* $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.

b) *Si* I *est le milieu de* (A,B), *alors pout tout* $M \in \mathbf{P}$, *on a* $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\,\vec{MI}$.

Que dire du triangle AMB *si* $2\delta(M,I) = \delta(A,B)$?

Quel est l'ensemble $\{M \in \mathbf{P} \mid \delta(M,I) = \frac{1}{2}\delta(A,B)\}$?

40 *Si* A, B, C *sont trois points distincts,* M *est dit* ***barycentre*** *de* A, B, C *affectés des coefficients respectifs* α, β, γ *si et seulement si* $\alpha\,\vec{MA} + \beta\,\vec{MB} + \gamma\,\vec{MC} = \vec{0}$.

Démontrer que M *existe et est unique si et seulement si* $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

41 *Si* $A \notin (BC)$:

a) *peut-on parler du barycentre de deux points* A *et* B *affectés des coefficients* $\alpha = 1$ *et* $\beta = 1$? *Quel serait le barycentre de* A *et* B *affectés des coefficients* α *et* β *si* $(\alpha,\beta) \in \{(2; 1), (2; 3), (1; -1)\}$?

b) *dessiner l'équibarycentre de* A, B, C ($\alpha = \beta = \gamma$);

c) *dessiner le barycentre de* A, B, C *dans les cas suivants:* $(\alpha,\beta,\gamma) \in \{(2,3,4); (-2,3,1); (3,-1,-1)\}$;

d) *démontrer que le vecteur* $\vec{v} = 3\,\vec{MA} + 2\,\vec{MB} - 5\,\vec{MC}$ *ne dépend pas du choix de* M *dans* $\mathbf{P}$;

e) *donner une condition nécessaire et suffisante pour* α, β *et* γ *si* $\vec{v} = \alpha\,\vec{MA} + \beta\,\vec{MB} + \gamma\,\vec{MC}$ *est un vecteur fixe quel que soit* $M \in \mathbf{P}$.

Pour la mesure des vecteurs, on utilise des propriétés analogues à celles de la distance, de la mesure des angles ou de la mesure des aires.

Exercice 42

Comment peut-on définir une mesure des arcs, une longueur des segments? Citer des propriétés de ces mesures. Comment définir une mesure sur $\mathcal{V}_2$*, appelée norme et notée* $\|...\|$*, en utilisant* $(A,B) \in \vec{v}$ *et* $\|\vec{v}\| = \delta(A,B)$?

Pour mesurer les vecteurs, il convient de respecter la structure de $\mathcal{V}_2$, l'addition et la multiplication des vecteurs par un réel. Pour cela, on pose la définition suivante.

Définition 7 On appelle **norme** sur l'ensemble des vecteurs $\mathcal{V}_2$ une application, notée $\|...\|$ et

$$\|...\| : \mathcal{V}_2 \to \mathbb{R}_+$$
$$\vec{v} \mapsto \|\vec{v}\|$$

telle que:

$\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$ pour fixer le début de la mesure

$\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha|\|\vec{v}\|$ pour tenir compte de l'opération externe

$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ pour tenir compte de la somme des vecteurs

Remarque

La norme est une application, la norme d'un vecteur $\vec{v} \in \mathcal{V}_2$ est le nombre $\delta(A,B)$ et $(A,B) \in \vec{v}$.

Exercices 43

Pourquoi $\|\vec{v}\| = \|-\vec{v}\|$? *Y a-t-il plusieurs vecteurs associés à* 1 ?

Définition 8 Un vecteur est dit **unitaire** si et seulement si sa norme est 1.

Exercices

44 *Comparer* $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ *et* $\|-\vec{u} - \vec{v}\|$.

45 *Avec* $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha|\|\vec{v}\|$, *démontrer:* $\alpha\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

46 *Si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ont même direction, comparer* $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ *et* $\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$.

Dans quel cas a-t-on $\|\vec{u}+\vec{v}\| < \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$?

47 *Si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *de sens contraires et* $\|\vec{u}\| \geq \|\vec{v}\|$, *comparer* $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ *et* $\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|$.

48 *Démontrer:* $\|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\| \leq \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|+\|\vec{w}\|$.

49 *Si, dans un parallélogramme* ABCD, $\delta(A,B) = 7$ *et* $\delta(B,C) = 3$, *calculer:*
$\|\vec{AB}+\vec{CD}+\vec{CB}\|$, $\|\vec{AB}+3\vec{DC}\|$, $\|2\vec{AD}-3\vec{BC}\|$, $\|2\vec{AC}+2\vec{CB}\|$. *Donner un encadrement de* $\|\vec{AB}+\vec{BC}\|$.

50 *Montrer que pour tout vecteur* $\vec{v}$ *non nul, il existe exactement deux vecteurs unitaires de même direction que* $\vec{v}$.

4 Base de $\mathcal{V}_2$

Définition 9 Deux vecteurs sont **colinéaires** si et seulement si l'un est multiple de l'autre.

Exercices

51 *Le vecteur nul et tout vecteur du plan sont colinéaires. Deux vecteurs opposés sont-ils colinéaires? Et deux vecteurs de sens contraires, deux vecteurs de même sens?*

52 *Comment choisir des représentants de deux vecteurs pour que ces deux vecteurs soient colinéaires?*

THEOREME 11 Il existe au moins deux vecteurs non colinéaires dans $\mathcal{V}_2$.

Définition 10 Deux vecteurs non colinéaires sont aussi dits **linéairement indépendants.**

Exercices

53 *On donne un carré* ABCD. *Les vecteurs* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BD}$ *sont-ils colinéaires? Qu'en est-il de* $2\,\overrightarrow{AB}$ et $-3\,\overrightarrow{BD}$? *Montrer que si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ne sont pas colinéaires et* $0 \notin \{x,y\}$, *alors* $x\cdot\vec{u}$ *et* $y\cdot\vec{v}$ *ne sont pas colinéaires.*

54 *Si* ABCD *est un parallélogramme,* $2\,\overrightarrow{AB}$ et $3\,\overrightarrow{CD}$ *sont-ils colinéaires? Montrer que si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires, alors* $x\cdot\vec{u}$ *et* $y\cdot\vec{v}$ *sont colinéaires. La réciproque est-elle vraie?*

Définition 11 On appelle **combinaison linéaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur $\vec{t}$ tel que

$$\vec{t} = \alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}$$

Exercice *55*

Si ABCD *est un trapèze et* (AB) || (CD), *dessiner* E *et* F *si* $\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{DC}$ *et* $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} - 2\,\overrightarrow{BD}$. *Comment choisir* α *et* β *si* $\overrightarrow{AA} = \alpha\,\overrightarrow{AC} + \beta\,\overrightarrow{BD}$?

THEOREME 12	Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires si et seulement si $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0.$

COROLLAIRE	Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants, alors $\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v} = x\cdot\vec{u}+y\cdot\vec{v} \Leftrightarrow \alpha = x$ et $\beta = y$

THEOREME 13 Tout vecteur de $\mathcal{V}_2$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathcal{V}_2$.

Définition 12 Une **base** de $\mathcal{V}_2$ est un couple de vecteurs linéairement indépendants.

Définition 13 Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}_2$ et $\vec{t} = x\cdot\vec{u} + y\cdot\vec{v}$, alors x et y s'appellent respectivement première et seconde **composantes** de $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Notation: $\vec{t} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base donnée.

COROLLAIRE Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes composantes respectives dans la même base.

Exercices

56 Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}_2$, quelles sont les composantes de $\vec{u}$, de $\vec{v}$, de $\vec{0}$, de $-\vec{v}$ et celles de $\vec{u} - \vec{v}$? $(\vec{v}, \vec{u})$ est-il aussi une base de $\mathcal{V}_2$?

57 Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}_2$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, donner les composantes de $\vec{a} = \vec{t} + \vec{s}$ et de $\vec{b} = 2\vec{t} - 3\vec{s}$. Si $\vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{t}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires? Et $\vec{s}$ et $\vec{w}$?

58 Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, montrer que $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ et $\alpha\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$

59 Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -10 \\ 25 \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$. A-t-on $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires? Même question pour $\vec{u}$ et $\vec{w}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Comment choisir x si $\vec{u}$ et $\vec{t}$ sont colinéaires, si $\vec{v}$ et $\vec{t}$ non colinéaires?

THEOREME 14 Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}_2$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\text{dét}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$.

Exercices

60 Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}_2$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$:

a) écrire $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$;

b) a-t-on $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement $\vec{u}$ et $\vec{w}$ colinéaires?

c) si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}_2$, déterminer les composantes de $\vec{i}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Quelles sont les composantes de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$?

61 Déterminer x si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires. Peut-on trouver y si $\vec{s} = \begin{pmatrix} y+1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ y+2 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs colinéaires? Trouver z si $\vec{a} = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ z \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

5 Repère du plan

Définition 14 On appelle **repère** du plan un triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où $O \in \mathbf{P}$ et $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}_2$. Le point O se nomme **origine** du repère.

Exercices

62 Si $O \in (IJ)$, a-t-on $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ repère du plan?

63 Si $A \notin (BC)$, combien de repères peut-on donner à l'aide de ces trois points?

64 *Si* $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$ *est un repère du plan et* $A \notin (CD)$, *comment choisir* C *et* D *pour que* $(O, \vec{OA}, \vec{CD})$ *soit un repère du plan? Si on ajoute* $(OB) \parallel (CD)$, *a-t-on* $(A, \vec{OA}, \vec{CD})$ *repère du plan?*

Définition 15 On appelle **coordonnées** d'un point M du plan dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les composantes du vecteur $\vec{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. La première coordonnée se nomme **abscisse** de M et la seconde **ordonnée**.

Notation : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \Leftrightarrow M(x,y)$

Exercice 65

Si $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ *est un repère du plan, pourquoi a-t-on* $A \notin (BC)$? *On donne* $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$ *et* $\vec{AN} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$. *Quelles sont les coordonnées de* A, B, C, M, N ? *Quelles sont les composantes des vecteurs* $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{MN}$?

THEOREME 15 Si dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ alors:

1. $\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$
2. M milieu de (A,B) $\Leftrightarrow$ $M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$.

Exercice 66

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *on donne* $A(1; 2)$ *et* $B(-3; -1)$. *Trouver* x, y *et* z *si* $M(x, 0) \in (AB)$ *et* $N(0, y) \in (AB)$ *et* $D(z, 2) \in (AB)$. *A-t-on* $E(3; 3) \in (AB)$?

THEOREME 16 Si $(A,B) \in \mathbb{P}^2$ et $A \neq B$, alors $(AB) = \{ M \in \mathbb{P} \mid \vec{AM} = \lambda \vec{AB} \}$.

Remarque

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite (AB). Un vecteur directeur est toujours différent du vecteur nul. Tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (AB).

Définition 16 Un **repère d'une droite** passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{v} \neq \vec{0}$ est le couple $(A, \vec{v})$.

Notation

$d(A,\vec{v})$ pour la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$.

Définition 17 Pour un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, les droites $d(O,\vec{i})$ et $d(O,\vec{j})$ sont appelées premier **axe**, respectivement deuxième **axe** du système de coordonnées.

THEOREME 17 Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires.

Exercices

67 *Les droites* (AB) *et* (CD) *sont-elles parallèles dans les cas suivants? Quelle est l'intersection de* (AB) *avec les axes du système de coordonnées?*

a) $A(2;1)$, $B(2;0)$, $C(\frac{3}{2};\frac{1}{2})$, $D(\frac{3}{2};0)$

b) $A(1;-2)$, $B(1;0)$, $C(-1;-\frac{3}{2})$, $D(2;0)$

c) $A(1;-1)$, $B(2;-3)$, $C(3;-2)$, $D(5;-6)$

68 *On donne* $A(3;5)$, $B(1;-3)$, $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$. *Déterminer le point de l'intersection des droites* $d(A,\vec{a})$ *et* $d(B,\vec{b})$.

69 *On donne* $A(-3;-5)$, $B(5;1)$, $C(1;7)$. *Déterminer les milieux des côtés du triangle* ABC *et le point de concours des médianes.*