1) Vérifier que le nombre –3 est racine de la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$, puis factoriser f(x) .

On a : $f(-3) = 2\cdot(-3)^3 + 9(-3)^2 + 7\cdot(-3) - 6$

$= 2(-27) + 9\cdot 9 - 21 - 6$

$= -54 + 81 - 21 - 6 = 0$ 1

Donc : $f(x) = (x+3)\cdot(2x^2 + 3x - 2)$

(cf Théorème 2 page 6 du script)

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +9x^2 & +7x & -6 & x+3 \\
\cline{5-5}
-2x^3 & -6x^2 & & & 2x^2+3x-2 \\
\hline
0 & +3x^2 & +7x & & \\
 & -3x^2 & -9x & & \\
\cline{2-4}
 & 0 & -2x & -6 & \\
 & & +2x & +6 & \\
\cline{3-4}
 & & 0 & +0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 2 & 9 & 7 & -6 \\
 & & -6 & -9 & +6 \\
\hline
-3 & 2 & 3 & -2 & 0
\end{array}$$

$$2x^2+3x-2$$

Exercice 11

Effectuer la division et simplifier

1) $f(x) = \dfrac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2}{x^2 + 1}$

2) $f(x) = \dfrac{x^5 + 2x^4 - x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$

3) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

4) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$

Exercice 11

Effectuer la division et simplifier

1) $f(x) = \dfrac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2}{x^2 + 1} = x^3 + x^2$

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^5 & + & x^4 & + & x^3 & + & x^2 & x^2 + 1 \\
\cline{8-8}
-x^5 & & & & -x^3 & & & x^3 + x^2 \\
\cline{1-7}
0 & + & x^4 & + & 0 & + & x^2 & \\
 & & -x^4 & & & & -x^2 & \\
\cline{2-7}
 & & 0 & & & + & 0 &
\end{array}$$

3) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = 2x + 1$

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -x^2 & +x & +1 & x^2 - x + 1 \\ \cline{5-5} -2x^3 & +2x^2 & -2x & & 2x + 1 \\ \cline{1-3} 0 & +x^2 & -x & +1 & \\ & -x^2 & +x & -1 & \\ \cline{2-4} & 0 & +0 & +0 & \end{array}$$

4) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1} = x + \dfrac{x - 1}{x^3 - 1}$ (cf thm 1 script)

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + 0\cdot x - 1 & x^3 - 1 \\ \hline -x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad + x & x \\ \hline 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + x - 1 & \end{array}$$

Identités remarquables

1) $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$

2) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

4) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

5) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$

$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

$(a+b-c)^2 = \dots$

2) Calculer les racines de f : ($\Leftrightarrow$ résoudre f(x) = 0)

a) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8$

b) $f(x) = (3 + 7x)(4 - x^2)(\frac{3}{5}x - 2)$

c) $f(x) = (x-1)^3 - 27$

d) $f(x) = (2x + 1)(2x + 3) - 30x - 15$

e) $f(x) = x^3 - 13x + 12$

f) $f(x) = 12x^2 - 2x - 2$

g) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4$

h) $f(x) = x^2 - 4x - 77$

a) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8 = 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow (x-1)\cdot(x^3 - x^2 - 10x - 8) = 0$

$\Longleftrightarrow$ ...

$\Longleftrightarrow$ $x \in \{ \quad \}$

$\cancel{S=}$

Cornhico :

$f(1) = 1-2-9+2+8 = 0$

	1	-2	-9	2	8
		1	-1	-10	-8
1	1	-1	-10	-8	0

exercice 2 : résoudre $f(x) = 0$ et $x \in \mathbb{R}$

a) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(\underbrace{x^3 - x^2 - 10x - 8}_{g(x)}) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^2 - 2x - 8) = 0$

coin brico : $\begin{cases} m + n = -2 \\ m \cdot n = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ n = +2 \end{cases}$

d'où $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-4)(x+2) = 0$

$\Leftrightarrow x \in \{1 ; -1 ; 4 ; -2\}$

coin brico

$f(1) = 1 - 2 - 9 + 2 + 8 = 0$

Horner :

	1	-2	-9	2	8
		1	-1	-10	-8
1	1	-1	-10	-8	0

$g(1) = 1 - 1 - 10 - 8 = -18 \neq 0$

$g(-1) = -1 - 1 + 10 - 8 = 0$

Horner

	1	-1	-10	-8
		-1	+2	+8
-1	1	-2	-8	0

b) $f(x) = (3 + 7x)(4 - x^2)(\frac{3}{5}x - 2) = 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (3+7x) = 0$ $\quad x = \frac{-3}{7}$

ou $\quad$ ou

$4 - x^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 2$ ou $x = -2$

ou $\quad$ ou

$\frac{3}{5}x - 2 = 0$ $\quad x = \frac{10}{3}$

$\Leftrightarrow$ ~~S =~~ $x \in \left\{ \frac{-3}{7} ; 2 ; -2 ; \frac{10}{3} \right\}$

c) $f(x) = (x-1)^3 - 27$ $= 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x-1)^3 - 3^3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1-3)\left((x-1)^2 + (x-1)\cdot 3 + 9\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x-4)\left(x^2 + x + 7\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 4$ ou $x^2 + x + 7 = 0$?

$\Leftrightarrow x = 4$ ou $x \in \emptyset$

$\Leftrightarrow x \in \{4\}$

d) $f(x) = (2x+1)(2x+3) - 30x - 15 = 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad (2x+1)(2x+3) - 15(2x+1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (2x+1)\left[(2x+3) - 15\right] = 0$

$\Leftrightarrow \quad (2x+1)(2x-12) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (2x+1) \cdot 2(x-6) = 0 \quad :2$

$\Leftrightarrow \quad 2x+1 = 0$ ou $x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 6$

$\Leftrightarrow \quad x \in \left\{-\frac{1}{2} ; 6\right\}$

e) $f(x) = x^3 - 13x + 12 = 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-12) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+4)(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow x \in \{1 ; -4 ; 3\}$

<u>coin brico</u>

$f(1) = 1 - 13 + 12 = 0$

Horner :

	1	0	−13	+12
		1	1	−12
1	1	1	−12	0

$\begin{cases} m + n = 1 \\ m \cdot n = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = -3 \end{cases}$

f) $f(x) = 12x^2 - 2x - 2 = 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad 2(6x^2 - x - 1) = 0 \quad) : 2$

$\Leftrightarrow \quad 6x^2 - x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 6x^2 - 3x + 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (6x^2 - 3x) + (2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 3x(2x - 1) + 1 \cdot (2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2x - 1)(3x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x - 1 = 0 \quad$ ou $\quad 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad$ ou $\quad x = -\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \quad x \in \left\{ \frac{1}{2} ; -\frac{1}{3} \right\}$

<u>arin lucio</u>

$\begin{cases} m + n = -1 \\ m \cdot n = -6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m = -3$ et $n = +2$

g) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow y = x^2$ et $y^2 + 3y - 4 = 0$

$\Leftrightarrow y = x^2$ et $(y-1)(y+4) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+4) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) \cdot \underbrace{(x^2+4)}_{\neq 0} = 0$

$\Leftrightarrow x \in \{1 ; -1\}$

h) $f(x) = x^2 - 4x - 77 = 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x-11)(x+7) = 0$

$\Leftrightarrow x - 11 = 0$ ou $x + 7 = 0$

$\Leftrightarrow x = 11$ ou $x = -7$

$\Leftrightarrow x \in \{11 ; -7\}$

Cerin brico :

$\begin{cases} m + n = -4 \\ m \cdot n = -77 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ n = -11 \end{cases}$