OPERATIONS ET ORDRE DANS $\mathbb{R}$

1 Opérations et groupes

Rappel

1 L'opération somme dans $\mathbb{N}$ associe à tout couple de nombres naturels $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ un et un seul élément de $\mathbb{N}$. La somme ou addition est une application. La somme de deux nombres ou l'addition de deux nombres est un nombre. On appelle **terme** chacun de ces deux nombres.

Une **opération** est une application dont l'ensemble de départ est un produit cartésien.

Pour l'addition dans $\mathbb{N}$ on pose:

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$
$$(a, b) \mapsto +((a, b)) = c$$

On écrit simplement $a + b$ au lieu de $+((a, b))$ l'image du couple (a, b) par l'application $+$.

2 $+$ est associative, $\forall \{x, y, z\} \subset \mathbb{N}$ $\quad x + (y + z) = (x + y) + z$

$+$ admet un élément neutre 0, $\forall x \in \mathbb{N}$ $\quad 0 + x = x + 0 = x$

$+$ est commutative, $\forall \{x, y\} \subset \mathbb{N}$ $\quad x + y = y + x$

3 Plus généralement, pour toute opération $*$ définie dans un ensemble E,

- l'opération est dite **associative** si $\forall \{x, y, z\} \subset E \quad x * (y * z) = (x * y) * z$
- un élément e est dit **neutre** si $\forall x \in E \quad e * x = x * e = x$
- x' est un **symétrique** d'un élément x si, e étant un élément neutre, $x * x' = x' * x = e$
- l'opération est dite **commutative** si $\forall \{x, y\} \subset E \quad x * y = y * x$

Exercices

1 *Donner une définition pour la somme dans* $\mathbb{Z}$. *La somme dans* $\mathbb{N}$ *est-elle la somme dans* $\mathbb{Z}$ *?Dans* $\mathbb{Z}$, *tout élément* x *possède un opposé* x' *tel que la somme de* x *et* x' *est l'élément neutre* 0; *écrire cette proposition avec un quantificateur.*

2 *Que peut-on dire de la somme dans* $\mathbb{Q}$ *?*

3 *Peut-on donner une opération qui ne concerne pas les nombres?*

4 *Donner une définition de l'opération dans un ensemble* E.

5 ***Théorème.*** *Pour une opération* $*$ *dans un ensemble* E, *on a* $a = b \Rightarrow a * c = b * c$.
On dit que l'égalité est ***compatible*** *avec l'opération* $*$.

Structure de groupe additif

Pour fixer les propriétés des **nombres réels**, on admet que l'on dispose d'un ensemble noté $\mathbb{R}$ tel que $+$ est une opération dans $\mathbb{R}$ avec

A_1 $+$ est associative

A_2 $+$ admet un élément neutre 0

A_3 tout élément x possède un symétrique (appelé **opposé**) noté $-x$

A_4 $+$ est commutative.

Définition 1 Un **groupe** est un couple (ensemble, opération) dont l'opération vérifie les propriétés suivantes

G_1 associativité

G_2 existence d'un élément neutre

G_3 existence d'un symétrique pour chaque élément

Un groupe est dit **groupe commutatif** (G_4) si son opération est en plus commutative.

Avec cette définition, $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif. On dit que $(\mathbb{R}, +)$ est un **groupe additif** parce que l'opération est l'addition.

On peut construire des groupes avec des ensembles autres que des nombres. Si l'on prend par exemple $E = \{a, b\}$, il suffit de se donner une opération $*$ de $E \times E$ vers E qui vérifie les propriétés du groupe. On a alors quatre couples dont on cherche les images. On peut inscrire les images de chaque couple dans une table appelée table d'opération. Si l'on pose par exemple

$* : E \times E \to E$

$(a, a) \mapsto a * a = a$

$(a, b) \mapsto a * b = b$ on écrit la table suivante:

$(b, a) \mapsto b * a = b$

$(b, b) \mapsto b * b = a$

*	a	b
a	a	b
b	b	a

Exercices

6 *Quel est l'élément neutre pour l'opération de l'exemple ci-dessus? Quel est l'élément symétrique de* a *, de* b *? Cette opération est-elle associative? Vérifier que l'on a obtenu un groupe commutatif* $(E, *)$.

7 *Construire un groupe avec l'ensemble* $E = \{a\}$; *avec l'ensemble* $E = \{a, b, c\}$.

8 *Proposer une définition de l'ensemble des* ***nombres entiers*** $\mathbb{Z}$, *puis donner une définition pour la soustraction dans* $\mathbb{Z}$. $(\mathbb{Z}, -)$ *est-un groupe?*

THEOREMES

1 Dans un groupe, l'associativité peut s'utiliser pour plus de trois éléments.

2 Dans un groupe, l'élément neutre est unique.

3 Dans un groupe, le symétrique d'un élément est unique.

4 Dans un groupe, le symétrique du symétrique est l'élément lui-même.

5 Dans un groupe $(E, *)$, $(a * b)' = b' * a'$

Dans un groupe commutatif $(E, *)$, $(a * b)' = a' * b'$

6 Dans un groupe $(E, *)$, $\forall \{a, b, x\} \subset E \quad x * a = b \Leftrightarrow x = b * a'$

Pour la résolution d'une équation dans $\mathbb{R}$, on a $x + a = b \Leftrightarrow x = b + (-a) = b - a$

Exercices

9 *Résoudre les équations suivantes (isoler* x*)*

1) $x + 3 = 5$ 2) $0 + x = 0$

3) $x + 7 = 0$ 4) $x + 0{,}5 = -0{,}33$

5) $5 + x - 1{,}4 = 0{,}1 + 7$ 6) $(x + 2) + x = (3 + x) + 1$

7) $x - 1{,}2 = - 1{,}2$ 8) $x + 1{,}2 = - 1{,}2$

9) $x + 4 = - (4 - 0{,}33)$ 10) $- x - 2 = 1$

11) $x - 3 = 4 - (- 2 + 0{,}5)$ 12) $2{,}5 - x = - 1 - (0{,}25 - 0{,}5)$

10 ***Théorème.*** *Dans un groupe* $(E,*)$, *tout élément est régulier,*

$\forall \{a, b, c\} \subset E \qquad (a * c = b * c \Rightarrow a = b) \quad et \quad (c * a = c * b \Rightarrow a = b)$

11 *La multiplication est une opération dans* $\mathbb{N}$ *si l'on pose*

$$\begin{aligned} \bullet : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (x, y) &\mapsto \bullet\big((x, y)\big) = x \bullet y \end{aligned}$$

Quelles sont les propriétés de cette opération?

12 *Proposer une définition pour la multiplication dans* $\mathbb{Z}$. *Pourquoi la multiplication dans* $\mathbb{N}$ *n'est pas la multiplication dans* $\mathbb{Z}$ *?*

<u>Structure de groupe multiplicatif</u>

On note $\mathbb{R}^*$ l'ensemble $\mathbb{R} - \{0\}$ et on admet pour l'algèbre que l'on dispose d'une opération $\bullet$, la **multiplication** dans $\mathbb{R}$, telle que $(\mathbb{R}^*, \bullet)$ est un groupe commutatif dont l'élément neutre est noté 1 et le symétrique de a , appelé **inverse**, s'écrit a^{-1} ou $\dfrac{1}{a}$.

On dit que $(\mathbb{R}^*, \bullet)$ a une structure de **groupe multiplicatif** parce que l'opération est la multiplication, les quatre propriétés de ce groupe étant notées M_1 , M_2 , M_3 , M_4 par analogie avec l'addition.

Exercices

13 *Formuler à l'aide des quantificateurs les quatre propriétés de la multiplication dans* $\mathbb{R}$.

14 *Reprendre les théorèmes 1 à 6 en les formulant pour la multiplication dans* $\mathbb{R}^*$.

15 *Si* $\mathbb{R}_+$ *est l'ensemble des réels positifs, le couple* $(\mathbb{R}_+, \bullet)$ *est-il un groupe? Et* $(\mathbb{R}_+^*, \bullet)$*?*

16 *Proposer une définition de l'ensemble des* ***nombres rationnels*** $\mathbb{Q}$ *et définir la multiplication dans* $\mathbb{Q}$. *Pourquoi la multiplication dans* $\mathbb{Z}$ *n'est pas la multiplication dans* $\mathbb{Q}$ *?*
$(\mathbb{Q}, \bullet)$ *et* $(\mathbb{Q}^*, \bullet)$ *sont-ils des groupes?*

17 *Envisager une définition pour la division en employant respectivement* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. *Enoncer des propriétés de cette opération.*

18 Résoudre les équations (isoler x*)*

Exemple $3x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\cdot 9$ (théorème 6)

1)	$7x = 14$	2)	$7x = 7$
3)	$7x = -14$	4)	$7x = 1$
5)	$5x + 1 = 12$	6)	$8x - 5 = 7$
7)	$3x = 8$	8)	$5(0{,}5\,x) = 1$
9)	$0{,}25\,x + 1 = 0$	10)	$-26x + 52 = 0$

2 Le corps commutatif des réels

On ne donne pas avec les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \bullet)$ le comportement de 0 par rapport à la multiplication. Pour que $+$ et $\bullet$ puissent figurer simultanément dans une égalité, on admet la **distributivité D**, $\forall \{x, y, z\} \subset \mathbb{R}$ $\quad x\cdot(y+z) = (x\cdot y) + (x\cdot z) = (y+z)\cdot x$. On écrit aussi $x\cdot(y+z) = xy + xz$.

Ainsi, pour l'ensemble des nombres réels, on dispose de 9 propriétés A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3, M_4 et D . On abrège en disant que le triplet $(\mathbb{R}, +, \bullet)$ est un **corps commutatif**.

Exercices

Dans chacun des exercices suivants, mentionner à chaque transformation la propriété du corps commutatif $(\mathbb{R}, +, \bullet)$ *utilisée et énoncer en français le résultat ainsi établi.*

19 $\quad a\cdot 0 = a\cdot 0 + 0 = a\cdot 0 + [a + (-a)] = a\cdot 0 + [a\cdot 1 + (-a)]$

$= [a\cdot 0 + a\cdot 1] + (-a) = a\cdot[0 + 1] + (-a) = a\cdot 1 + (-a) = a + (-a) = 0$

$0\cdot b = [a + (-a)]\cdot b = a\cdot b + (-a)\cdot b = b\cdot a + b\cdot(-a) = b\cdot[a + (-a)] = b\cdot 0 = 0$

20 $\quad (-a)\cdot b + a\cdot b = (-a + a)\cdot b = 0\cdot b = 0$

et $\quad (-a)\cdot b + a\cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-a)\cdot b = -(ab)$

on a aussi $\quad (-1)\cdot b = -(1\cdot b) = -b$

$a\cdot(-b) + a\cdot b = a\cdot(-b + b) = a\cdot 0 = 0$

et $\quad a\cdot(-b) + a\cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\cdot(-b) = -(ab)$

21 *a)* $\quad -(-a) = a$

b) $\quad$ si $a \neq 0$ $\quad$ alors $\quad (a^{-1})^{-1} = a$

c) $\quad$ si $a \neq 0$ $\quad$ alors $\quad \dfrac{1}{\dfrac{1}{a}} = a$

22 $\quad (-a)(-b) = -[a(-b)] = -[-(ab)] = ab$

23 *Quel est l'inverse de* -1 *? (Justification)*

24 *Avec* $0 \notin \{a, b\}$ $\quad \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{ab}$ $\quad$ ou $\quad a^{-1}\cdot b^{-1} = (ab)^{-1}$

25 *Avec l'écriture* $b^{-1} = \dfrac{1}{b}$, *on convient aussi d'écrire* $\quad a\cdot b^{-1} = a\cdot\dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{b}$.

alors $\quad \dfrac{-a}{b} = (-a)\cdot b^{-1} = -[a\cdot b^{-1}] = -\dfrac{a}{b}$

26 $\quad \dfrac{1}{-b} = (-b)^{-1} = [(-1)\cdot b]^{-1} = (-1)^{-1}\cdot b^{-1} = -1\cdot b^{-1} = \dfrac{-1}{b} = -\dfrac{1}{b}$

27 $\quad \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d} = (a\cdot\dfrac{1}{b})\cdot(c\cdot\dfrac{1}{d}) = (ac)\cdot(\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{d}) = (ac)\cdot(\dfrac{1}{bd}) = \dfrac{ac}{bd}$

28 $\quad \dfrac{c}{c} = c\cdot\dfrac{1}{c} = 1$

29 $\quad \dfrac{ac}{bc} = (ac)\cdot(\dfrac{1}{bc}) = a\cdot c\cdot\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{c} = (a\cdot\dfrac{1}{b})\cdot(c\cdot\dfrac{1}{c}) = \dfrac{a}{b}\cdot 1 = \dfrac{a}{b}$

30 $\quad \dfrac{a}{\dfrac{b}{c}} = \dfrac{c\cdot a}{c\cdot\dfrac{b}{c}} = \dfrac{c\cdot a}{b}$

31 $\quad \dfrac{\dfrac{a}{b}}{c} = \dfrac{b\cdot\dfrac{a}{b}}{b\cdot c} = \dfrac{\dfrac{a\cdot b}{b}}{b\cdot c} = \dfrac{a}{b\cdot c}$

32 $\quad \dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}} = \dfrac{bd\cdot\dfrac{a}{b}}{bd\cdot\dfrac{c}{d}} = \dfrac{\dfrac{abd}{b}}{\dfrac{cbd}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$

33 $\quad \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bd} + \dfrac{bc}{bd} = (ad)\cdot(\dfrac{1}{bd}) + (bc)\cdot(\dfrac{1}{bd}) = (ad + bc)\cdot(\dfrac{1}{bd}) = \dfrac{ad + bc}{bd}$

34 $\quad a\cdot b = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ a \neq 0 \text{ et } a^{-1}\cdot(ab) = a^{-1}\cdot 0 \text{ et } (a^{-1}\cdot a)\cdot b = 0 \text{ et } 1\cdot b = 0 \text{ et } b = 0 \end{cases}$$

35 $\quad \dfrac{a}{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\cdot\dfrac{1}{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \text{ et } b \neq 0$

Avec ces exercices, on a démontré les théorèmes suivants.

THEOREMES

7 0 est absorbant pour la multiplication $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

8 $(-a) \cdot b = -(ab) = a \cdot (-b)$

9 $-(-a) = a$; $(a^{-1})^{-1} = a = \dfrac{1}{\frac{1}{a}}$

10 $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Pour des dénominateurs non nuls:

11 $\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{ab}$ ou $a^{-1} \cdot b^{-1} = (ab)^{-1}$

12 $(-a) \cdot b^{-1} = -(a \cdot b^{-1})$ ou $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$ avec $a \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{b}$

13 $(-b)^{-1} = -(b^{-1})$ ou $\dfrac{1}{-b} = -\dfrac{1}{b} = \dfrac{-1}{b}$

14 $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

15 $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$

16 $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$

17 Un produit de deux facteurs est nul si et seulement si un des deux facteurs est nul.
Le carré d'un nombre est nul si et seulement si ce combre est zéro.

18 Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur est différent de 0.

Exercices

36 Simplifier les écritures.

1) $\dfrac{7}{\frac{2}{3}} =$ 2) $\dfrac{\frac{18}{3}}{5} =$ 3) $\dfrac{32 \cdot 27}{4 \cdot 243} =$

4) $\dfrac{\frac{15}{2}}{\frac{3}{4}} =$ 5) $\dfrac{\frac{0.17}{4}}{\frac{8}{34}} =$ 6) $\dfrac{9}{32} \cdot \dfrac{16}{18} =$

7) $\dfrac{3.6}{5} \cdot \dfrac{0.25}{8} =$ 8) $\dfrac{0.71}{0.67} =$ 9) $\dfrac{0.8}{0.2} =$

10) $\dfrac{\frac{15}{10}}{\frac{3}{10}} =$ 11) $\dfrac{-27}{0.2} \cdot \dfrac{10}{-3} =$ 12) $-\dfrac{1}{1.5} \cdot \dfrac{-3}{29} =$

13) $\dfrac{1.04}{\frac{52}{3}} \cdot \dfrac{-\frac{2}{5}}{0.5} =$ 14) $\dfrac{5}{1.2} + \dfrac{3}{1.6} =$ 15) $\dfrac{m}{a} + \dfrac{5}{a + d} =$

16) $\dfrac{7}{2} + \dfrac{5}{4} =$ 17) $\dfrac{28}{9} + \dfrac{2}{3} =$ 18) $\dfrac{5}{12} + \dfrac{-7}{18} =$

19) $\dfrac{1.2}{4} + \dfrac{2.1}{14} =$ 20) $\dfrac{12}{5a} \cdot \dfrac{-7b}{36} \cdot \dfrac{1}{a(-b)} =$ 21) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} =$

22) $\dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} =$ 23) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} =$ 24) $\dfrac{2}{\frac{3}{7}} + \dfrac{4}{\frac{1}{2}} =$

25) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} + \dfrac{\frac{1}{-3}}{\frac{3}{4}} =$ 26) $\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{\frac{1}{2}}} =$ 27) $\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{2 - \frac{5}{6}} =$

28) $\left(\dfrac{33}{42} + \dfrac{49}{63}\right) : \left(\dfrac{35}{30} - \dfrac{57}{108}\right) =$ 29) $\left(\dfrac{36}{63} - \dfrac{15}{25} + \dfrac{35}{42}\right) \cdot \dfrac{45}{78} - \dfrac{75}{175} =$

30) $\left(\dfrac{27}{36} + \dfrac{65}{91}\right) : \left(\dfrac{48}{18} - \dfrac{75}{60}\right) =$ 31) $\dfrac{7}{28}\left(\dfrac{30}{54} + \dfrac{36}{81}\right) - \dfrac{45}{12}\left(\dfrac{78}{30} - \dfrac{26}{65}\right) =$

37 Isoler x *(résoudre l'équation)*

Exemple $5x - 2 = 3 \Leftrightarrow 5x = 3 + 2 \Leftrightarrow 5x = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{5} = 1$

1) $3x + 4 = 0$ 2) $5x = -10$

3) $3x + 5 = -6x + 7$ 4) $2x + 5 - 8x = 5x - 1$

5) $\dfrac{1}{3}x - 2 = 0$ 6) $2x + \dfrac{1}{7} = \dfrac{3}{14}$

7) $\dfrac{4}{5}x = 7$ 8) $2x - 1 = \dfrac{1}{3}x + 2$

9) $\dfrac{4}{5}x + \dfrac{8}{9} = \dfrac{7}{3}$ 10) $\dfrac{1}{2}(x + 1) = 2x$

11) $3(x + 2) = 6x + 1$ 12) $0x = 1$

13) $0x = 0$ 14) $0x = a$

15) $0x = m + 1$ 16) $2x - 1 = 2x + 1$

17) $2x + 4 + x = 3x$ 18) $5x + \dfrac{1}{3} - x = 4x + \dfrac{2}{6}$

19) $2x = a - x$ 20) $\dfrac{1}{3}x + m = 2x$

21) $-x + \dfrac{1}{2} = m + 1$ 22) $1{,}3x + a = 3b + a$

38 Selon les exemples proposés, résoudre les équations.

$$(x + 3)(x - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \\ \text{ou} \\ x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ \text{ou} \\ x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-3; 7\}$$

1) $x(x+3) = 0$

2) $(x+1)(x-2) = 0$

3) $(2x+7)(5x-3) = 0$

4) $x(x+7)+4(x+7) = 0$

5) $(\frac{1}{2}x+3)(\frac{1}{5}x+10) = 0$

6) $(x+1)(x+2)+(x+1)(x+3) = 0$

7) $(3x-\frac{1}{5})(8x-7) = 0$

8) $(x+1)(x-1)(x+8) = 0$

9) $5x^2-2x = 0$

10) $(2x-\frac{1}{4})(3x-\frac{1}{5})(4x+\frac{1}{6}) = 0$

11) $4x^2+x = 0$

12) $(\frac{1}{2}x-\frac{15}{45})(10x-\frac{9}{12}) = 0$

13) $7x^2 = x$

14) $12x^2-9x = 3x^2$

15) $4x^2+8x = 5x^2-x$

16) $3x^2-5x = 9x$

Exemple

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x+2)(x-1) = 0\\ \text{et}\\ x-1 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2 = 0 \text{ ou } x-1 = 0\\ \text{et}\\ x-1 \neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = -2 \text{ ou } x = 1\\ \text{et}\\ x \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow x = -2 \Leftrightarrow x \in \{-2\}$$

Autre exemple

$$\frac{(x-2)^2}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x-2 \neq 0 \text{ et } (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } x = 2 \Leftrightarrow x \in \varnothing$$

17) $\frac{4-3x}{3} = \frac{5-x}{12}$

18) $\frac{x}{5} - 8\cdot\frac{x+1}{20} = 0$

19) $\frac{(2x+1)(x-5)^2}{x-5} = 0$

20) $\frac{(2x+8)(5x-\frac{1}{3})}{x+4} = 0$

21) $\frac{(x+2)(x+3)}{x-4} = 0$

22) $\frac{(x-\frac{1}{3})(3x+8)}{3x-1} = 0$

23) $\frac{(x+\frac{1}{2})(x-1)}{(2x+11)(\frac{1}{11}x-1)} = 0$

24) $\frac{(x+1)(3x+9)}{2x+3}\cdot\frac{5x-1}{2x+2} = 0$

25) $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} = 0$

26) $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} = 0$

27) $\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x+4} = 0$

28) $\frac{x-1}{x-3} - \frac{x-2}{x+3} = 0$

3 Exposant dans $\mathbb{Z}$

Pour préciser les propriétés des exposants, on donne une définition **récursive** qui permet de calculer de proche en proche.

Le **principe de récurrence** pour $\mathbb{N}$ dit ceci: "Si, pour une formule, on dit où l'on commence et comment on continue, alors on admet que la formule est vraie pour tous les nombres naturels". Ainsi, si une formule dépendant d'un entier naturel est vraie pour un entier donné et si, étant vraie pour $p \in \mathbb{N}$, elle est aussi vraie pour $(p + 1)$, alors elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La définition des exposants est donnée dans $\mathbb{Z}$, et on en démontre les propriétés en se ramenant à $\mathbb{N}$.

On pose la définition récursive suivante.

Définition 2 Si $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$ alors $a^n = a^{n-1} \cdot a$ et $a^1 = a$.

a s'appelle **nombre à la base**, n **exposant** et le nombre a^n **n-ième puissance de a.**

Exercices

39 *Que devient la définition ci-dessus pour* $a = 2$ *et* $n \in \{2, 3, 4, 5\}$? *En se servant de cette formule, qu'est-ce que* $7^2, 7^3, 7^{10}$?

40 *Que devient la définition ci-dessus si l'on pose* $n \in \{1, 0, -1, -2, -3\}$? *Pourquoi* 3^{-1} *est l'inverse de* 3, 3^{-2} *est l'inverse de* 3^2 ?

41 *Qu'est-ce que* a^{m+1} ? *Qu'est-ce que* a^{-1} ? *Pourquoi a-t-on posé dans la définition* $a \neq 0$? *On peut aussi poser* $0^{n+1} = 0^n \cdot 0$ *si* $n \in \mathbb{N}^*$ *et alors* $\mathbf{0^n = 0}$. *On n'écrit pas* 0^0, *ni* 0^{-1}.

42 *Si l'on pose*

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto f(n) \quad \text{et} \quad f(n+1) = 3 \cdot f(n) \quad \text{et} \quad f(1) = 3$$

qu'est-ce que $f(2)$, $f(3)$, $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$?

Pour $a \neq 0$, *si l'on pose*

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto f(n) \quad \text{et} \quad f(n+1) = a \cdot f(n) \quad \text{et} \quad f(1) = a$$

qu'est-ce que $f(n)$ *si* $n \in \{2, 3, 4, 5, 0, -1, -2, -3\}$? *Quel nom peut-on donner à l'application* f?

Pour chacun des exercices suivants, après les avoir illustrés par des cas particuliers, justifier les raisonnements qui servent de démonstrations pour $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$ *et énoncer à l'aide d'une phrase le résultat obtenu. Se servir du modèle développé dans les exercices 43 et 44.*

43 *On veut démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $1^n = 1$.

Si $n = 1$, *on a par définition* $1^n = 1^1 = 1$.

De plus, si la formule est vraie jusqu'à p, *c'est-à-dire si* $1^p = 1$,

alors par la définition récursive on a $1^{p+1} = 1^p \cdot 1 = 1^p = 1$ *car* 1 *est neutre pour la multiplication.*

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1^n = 1$

Par la définition récursive on a aussi $a^1 = a^0 \cdot a$ *et* $a^1 = a$ *pour* $a \neq 0$.

Alors $\mathbf{a^0 = 1}$. *En particulier* $1^0 = 1$.

Théorème. *L'élément neutre du produit élevé à une puissance entière positive est égal à lui-même.*

44 *Démontrer que* $\forall n \in \mathbb{N} \quad (ab)^n = a^n b^n$.

Si $n = 1$, *alors* $(ab)^1 = ab = a^1 b^1$.

Si la formule est vraie jusqu'à p, *c'est-à-dire si* $(ab)^p = a^p b^p$,

alors $(ab)^{p+1} = (ab)^p \cdot (ab) = (a^p b^p)(ab) = (a^p \cdot a)(b^p \cdot b) = a^{p+1} b^{p+1}$.

Avec $(ab)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 b^0$, *la formule est donc vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Théorème. *La puissance n-ième d'un produit est le produit des puissances n -ième de chacun des facteurs.*

45 *Pour* $a \neq 0$, $\quad (\frac{1}{a})^n \cdot a^n = (\frac{1}{a} \cdot a)^n = 1^n = 1$.

Donc $\quad (\frac{1}{a})^n = \frac{1}{a^n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

46 *Pour* $b \neq 0$, $\quad (\frac{a}{b})^n = (a \cdot \frac{1}{b})^n = a^n \cdot (\frac{1}{b})^n = a^n \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{a^n}{b^n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

47 *On démontre que* $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ *d'abord par récurrence sur* n, *avec* m *fixe.*

Si $n = 1$, *alors* $a^m \cdot a^1 = a^{m+1}$.

Si la formule est vraie jusqu'à p, *c'est-à-dire si* $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$

alors $a^m \cdot a^{p+1} = a^m \cdot (a^p \cdot a) = (a^m \cdot a^p) \cdot a = a^{m+p} \cdot a = a^{m+p+1}$.

Donc la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour la récurrence sur m, *avec* n *fixe il suffit de poser* $a^m \cdot a^n = a^n \cdot a^m$ *et de reprendre la démonstration pour le deuxième facteur* a^m.

48 *On démontre que* $(a^m)^n = a^{mn}$ *d'abord par récurrence sur* m *et* n *fixe*.

Si $m = 1$, *alors* $(a^1)^n = a^n = a^{1\cdot n}$.

Si la formule est vraie pour p, *on a* $(a^p)^n = a^{pn}$,

alors $(a^{p+1})^n = (a^p \cdot a)^n = (a^p)^n \cdot a^n = a^{pn} \cdot a^n = a^{pn+n} = a^{(p+1)n}$.

Donc la formule est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Par récurrence sur n *et* m *fixe*,

Si $n = 1$, *alors* $(a^m)^1 = a^m = a^{m\cdot 1}$

Si la formule est vraie pour p, *on a* $(a^m)^p = a^{mp}$,

alors $(a^m)^{p+1} = (a^m)^p \cdot a^m = a^{mp} \cdot a^m = a^{mp+m} = a^{m(p+1)}$.

Donc la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour des exposants négatifs on a les propriétés suivantes.

49 *Avec* $n \in \mathbb{N}$, *pour* $a \neq 0$ *on a* $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

En effet, si $n = 1$, *alors* $a^{-1} = \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a^1}$

Si la formule est vraie pour $p \in \mathbb{N}$, *c'est-à-dire si l'on a* $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$,

alors $a^{-p} = a^{-p-1} \cdot a \Leftrightarrow a^{-p} \cdot \dfrac{1}{a} = a^{-(p+1)} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a^p} \cdot \dfrac{1}{a} = a^{-p-1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a^p \cdot a} = a^{-p-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a^{p+1}} = a^{-p-1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a^{p+1}} = a^{-(p+1)}$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a* $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

50 *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $a \neq 0$ $\dfrac{1}{a^{-n}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a^n}} = a^n$

51 *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $ab \neq 0$ $(ab)^{-n} = \dfrac{1}{(ab)^n} = \dfrac{1}{a^n b^n} = \dfrac{1}{a^n} \cdot \dfrac{1}{b^n} = a^{-n} b^{-n}$

52 *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $a \neq 0$ *et* $b \neq 0$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n} = \dfrac{1}{\dfrac{a^n}{b^n}} = \dfrac{b^n}{a^n} = a^{-n} \cdot \dfrac{1}{b^{-n}} = \dfrac{a^{-n}}{b^{-n}}$

53 *Pour* $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$ *et* $a \neq 0$ *et* $m = n + q$ *ou* $m - n = q$

on a $a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \dfrac{1}{a^n} = a^{n+q} \cdot \dfrac{1}{a^n} = a^n \cdot a^q \cdot \dfrac{1}{a^n} = a^q = a^{m-n}$

avec $n = m + r$ *ou* $n - m = r$

on a $a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \dfrac{1}{a^n} = a^m \cdot \dfrac{1}{a^{m+r}} = a^m \cdot \dfrac{1}{a^m \cdot a^r} = a^m \cdot \dfrac{1}{a^m} \cdot \dfrac{1}{a^r} = \dfrac{1}{a^r}$

$= a^{-r} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$

Enfin $a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n}$

Remarque: *On a aussi* $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

54 Pour $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$ *et* $a \neq 0$

$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$ *et* $(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$

et $(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}$

Avec les exercices 43 à 54, on a démontré le théorème suivant.

THEOREMES Pour $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ et $\{m, n\} \subset \mathbb{Z}$ avec $m \cdot n \neq 0$ ou $(a \cdot b \neq 0)$

19	$a^1 = a$ et $a^0 = 1$
20	$(ab)^n = a^n b^n$
21	$(\frac{1}{a})^n = \frac{1}{a^n}$
22	$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
23	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
24	$(a^m)^n = a^{mn}$
25	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Exercices

55 Simplifier

1) $3^2 2^2 =$	2) $4^3 4^2 =$	3) $6^2 6^4 6^6 =$
4) $a^3 a^5 a^7 =$	5) $a^3 b^3 =$	6) $(a\, b^2 c)^4 =$
7) $x^3 x^{-4} =$	8) $2^{-4} 2^{-2} =$	9) $\frac{21^2}{7^3} =$
10) $\frac{-1}{7^3 7} =$	11) $(2^2)^3 =$	12) $(2^3)^2 =$
13) $(\frac{4}{5})^2 =$	14) $(5^2)^{-3}(15^2)^4 =$	15) $\frac{2^{-7}}{2^{-5}} =$
16) $5^{-3} 15 =$	17) $\frac{1}{4^2} 8 =$	18) $\frac{3}{4^{-3}} =$

19) $(2\,(-7))^{-2} =$	20) $(3\cdot 4)^{-2}\,\dfrac{1}{(5\cdot 2)^{-3}} =$	21) $(\frac{-8}{36})^{-3} =$
22) $\dfrac{(\frac{15}{14})^2}{(-\frac{2}{3})^3} =$	23) $\dfrac{2\,x^3}{(3\,x)^{-2}} =$	24) $8^3\,2^{-3} =$
25) $9^2\,27^{-1} =$	26) $[-(-b)^2]^5 =$	27) $16^{-3}\,2^5 =$
28) $(-a^2)^3 =$	29) $(-a^3)^2 =$	30) $3^{-1}\,(4\cdot 5^{-1})\,6 =$
31) $(x^{-3}y^{-4})^{-6} =$	32) $(x^{-4}y^2)^{-3} =$	33) $\dfrac{(-x)^3}{(-x)^{-4}} =$
34) $\dfrac{(-x)^{n+1}}{(-x)^{1-n}} =$	35) $(\frac{x}{y} : \frac{y}{x})^{-2} : (\frac{x^{-1}}{y^{-1}})^2 =$	36) $\dfrac{(16x^3)^{2n}}{(8x^2)^{3n-1}} =$

56 *Transformer les écritures en utilisant les puissances de 10, puis effectuer.*

1) $0.003 \cdot 0.02 \cdot 0.0005 =$	2) $(20'000)^3 \cdot (3'000)^2 =$	3) $(0.002)^3 \cdot (0.05)^2 =$
4) $(0.005)^5 \cdot (20'000)^2 =$	5) $(625'000)^4 \cdot (0.000016)^4 =$	6) $(0.004)^{-2} \cdot (0.008)^2 =$

57

Formules remarquables

Démontrer les égalités suivantes.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

58 *Développer à l'aide des formules.*

1) $(x+2)^2 =$	2) $(1-x)^2 =$	3) $(3-x)^2 =$
4) $(4+x)(4-x) =$	5) $(20+1)(20-1) =$	6) $21 \cdot 19 =$
7) $31 \cdot 29 =$	8) $59 \cdot 61 =$	9) $99 \cdot 101 =$
10) $(100-1)^2 =$	11) $101^2 =$	12) $102^2 =$
13) $(\frac{1}{2}x+2)^2 =$	14) $(4x-4)^2 =$	15) $(-x+3)^2 =$
16) $(-2x+3)^2 =$	17) $(-2x-2)^2 =$	18) $(7x+12)^2 =$

19) $(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}x)^2 =$	20) $(\frac{1}{4}x + 2)^2 =$	21) $(x^2 + x)^2 =$
22) $(x^2 - 2x)^2 =$	23) $(3x^3 + y^2)^2 =$	24) $(x^3 + 3y^2)^2 =$
25) $(x + 3 + a)^2 =$	26) $(x + 1 - b)^2 =$	27) $(a - b + c)^2 =$
28) $(x - y - z)^2 =$	29) $(2x + 1 + 3b)^2 =$	30) $(-x + 3 + 4b)^2 =$
31) $(2a + b + c)^2 =$	32) $(2x + 5)(2x - 5) =$	33) $52 \cdot 28 =$
34) $(2 - x)^3 =$	35) $(2 + 3x)^3 =$	36) $(-8x^2 + 1)(-8x^2 - 1) =$
37) $(x + 1)^3 =$	38) $(3x + 1)^3 =$	39) $(-3x^3 + 1)(3x^3 + 1) =$
40) $(3x^3 - 3)^3 =$	41) $(100 + 1)^3 =$	42) $99^3 =$
43) $98^3 =$	44) $102^3 =$	45) $(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2})^3 =$
46) $(x^2 - 2x)^3 =$	47) $(a + (b + c))^3 =$	48) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) =$
49) $(7 - 8x)^2 =$	50) $(a + b - c)^3 =$	51) $(3x - 4)(9x^2 + 12x + 16) =$
52) $(x^2 - 2)(x^2 + 2) =$	53) $(x^3 - 1)^2 =$	54) $(\frac{1}{2} - 2x)(\frac{1}{4} + x + 4x^2) =$
55) $-(3 - x)^2 =$	56) $(-x - 1)(x^2 - x + 1) =$	57) $(2x + \frac{1}{3})(4x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}) =$
58) $-(4 - x)^3 =$	59) $(x^3 - y^3)(x^3 + y^3) =$	60) $(x^2 - 5x + 25)(x + 5) =$
61) $(x^3 - 3)^3 =$	62) $(a + b^2 - c^3)^2 =$	63) $(2 - x)(4 + 2x + x^2) =$

4 Ordre dans ℝ

Dans l'ensemble ℝ des nombres réels, on utilise une relation d'ordre total notée $\leq$ (se lit inférieur ou égal). Elle doit être compatible avec la somme et le produit pour que les anciennes propriétés des opérations servent aussi aux inéquations. Elle permet de définir les intervalles et d'écrire des encadrements pour les nombres réels.

On admet dans $\mathbb{R}$ une relation " **inférieur ou égal** ", notée $\leq$, qui est

O_1 réflexive

O_2 antisymétrique

O_3 transitive

O_4 les éléments sont comparables deux à deux

O_5 compatible avec la somme $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$

O_6 pour le produit $0 \leq x$ et $0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$

En résumé, on dit que $(\mathbb{R}, +, \bullet, \leq)$ est un corps commutatif totalement ordonné.

Exercices

59 *Enoncer les propriétés* O_1 *à* O_6 *à l'aide des quantificateurs. Comment se nomme une relation qui a les propriétés* O_1 *à* O_3 *? et* O_1 *à* O_4 *?*

60 *Pourquoi a-t-on* $5{,}2 \leq 8{,}2 \Rightarrow 5{,}2 - 0{,}2 \leq 8{,}2 - 0{,}2 \Rightarrow 5 \leq 8$?

61 *Si* $0 \leq 3{,}5$ *et* $0 \leq 7$, *a-t-on* $0 \leq 7 \cdot 3{,}5$?

Si $0 \leq 3{,}5$ et $-7 \leq 0$, *a-t-on* $0 \leq (-7) \cdot 3{,}5$? $(-7) \cdot 3{,}5 \leq 0$?

62 *Justifier les transformations.*

a) $-6{,}1 \leq 0$ et $-5 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} -6{,}1 + 6{,}1 \leq 0 + 6{,}1 \\ \text{et} \\ -5 + 5 \leq 0 + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 6{,}1 \\ \text{et} \\ 0 \leq 5 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq 5 \cdot 6{,}1 \Rightarrow 0 \leq (-5) \cdot (-6{,}1)$

b) $3{,}4 \leq 10 \Rightarrow 3{,}4 - 10 - 3{,}4 \leq 10 - 10 - 3{,}4 \Rightarrow -10 \leq -3{,}4$

c) $-4{,}7 \leq -2{,}1 \Rightarrow -4{,}7 + 4{,}7 + 2{,}1 \leq -2{,}1 + 4{,}7 + 2{,}1 \Rightarrow 2{,}1 \leq 4{,}7$

d) $-\frac{2}{3} \leq \frac{7}{8} \Rightarrow -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{7}{8} \leq \frac{7}{8} + \frac{2}{3} - \frac{7}{8} \Rightarrow -\frac{7}{8} \leq \frac{2}{3}$

Définition 3 Pour $x \in \mathbb{R}$, x est **positif** $\Leftrightarrow 0 \leq x$ et x est **négatif** $\Leftrightarrow x \leq 0$.

Notation $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$ et $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$.

Définition 4 Deux nombres x et y sont de **même signe** si et seulement si $\{x,y\} \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $\{x, y\} \subset \mathbb{R}_-^*$.

Deux nombres sont de **signes contraires** si et seulement si ($x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_-^*$) ou ($x \in \mathbb{R}_-^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$).

Définition 5 Un **intervalle** $[x, y]$, appelé aussi intervalle fermé, est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que $[x, y] = \{z \in \mathbb{R} \mid x \leq z \text{ et } z \leq y\}$.

Un intervalle ouvert-fermé est l'ensemble $]x, y] = [x, y] - \{x\}$.

Un intervalle fermé-ouvert est l'ensemble $[x, y[= [x, y] - \{y\}$.

Un intervalle ouvert est l'ensemble $]x, y[= [x, y] - \{x, y\}$.

On appelle aussi intervalle l'ensemble $\{z \in \mathbb{R} \mid z \leq x\} =]-\infty, x]$

ou l'ensemble $\{z \in \mathbb{R} \mid x \leq z\} = [x, +\infty[$.

Convention d'écriture

On écrit, pour $x \leq y$ et $x \neq y$, $x < y$, qui se lit " x stictement inférieur à y "

pour $y \leq x$, $x \geq y$, qui se lit " x supérieur ou égal à y "

pour $y < x$, $x > y$, qui se lit " x strictement supérieur à y ".

Remarque

Dans l'écriture $[x, y]$, on a toujours $x \leq y$.

Exercices

63 Trouver x

1)	$x \in [2{,}5 ; 4{,}2] \cap [3{,}6 ; 5{,}8]$	2)	$x \in [-5{,}1 ; 8] \cup [0 ; 3{,}2[$
3)	$x \in [\frac{2}{3} ; 4] \cup [-\frac{2}{5} ; \frac{3}{2}]$	4)	$x \in [-\frac{4}{5} ; \frac{1}{5}] \cap \mathbb{R}_+$
5)	$x \in [-1 ; 1] - [0 ; \frac{1}{2}[$	6)	$x \in \mathbb{R} - \mathbb{R}_-$
7)	$x \in \mathbb{R}_- - \mathbb{R}$	8)	$x \in \complement_{\mathbb{R}} [3 ; +\infty[$
9)	$x \in]-\infty ; -2[\cup [0 ; 3]$	10)	$x \in]-\infty ; 1[\cap [0 ; \frac{1}{3}]$
11)	$x \in]-\infty ; 4] \cap]-5 ; +\infty[$	12)	$x \in]0 ; 5] \cup]-\infty ; 0[\cup \{0\}$
13)	$x \in]-4; 5[\cap]5; 8[$	14)	$x \in]3; 7[\cup [7; 8[$

64 Démontrer $a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq b - a \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow b - a \geq 0$.

Illustrer avec des cas particuliers les exercices suivants, puis justifier chaque transformation à l'aide des propriétés O_1 *à* O_6.

65 $a \leq b$ et $c \leq d \Rightarrow \begin{cases} a + c \leq b + c \\ \text{et} \\ c + b \leq d + b \end{cases} \Rightarrow a + c \leq d + b$

Enoncer cette propriété en français.

66 Deux opposés non nuls sont de signes contraires.

$0 < a \Leftrightarrow -a + 0 < -a + a \Leftrightarrow -a < 0$

67 *Quand on change de membre, on change de signe (pour la somme).*

$a \le b \quad \Leftrightarrow \quad a + (-a) + (-b) \le b + (-a) + (-b) \quad \Leftrightarrow \quad -b \le -a$

$x + a \le b \quad \Leftrightarrow \quad x + a + (-a) \le b + (-a) \quad \Leftrightarrow \quad x + 0 \le b - a \quad \Leftrightarrow \quad x \le b - a$

68 *Le produit d'un négatif par un positif est négatif.*

$$\begin{cases} a \le 0 \\ \text{et} \\ 0 \le b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le -a \\ \text{et} \\ 0 \le b \end{cases} \Rightarrow \quad 0 \le (-a)\cdot b \quad \Rightarrow \quad 0 \le -(ab) \quad \Rightarrow \quad ab \le 0$$

69 *Le produit de deux négatifs est positif.*

$$\begin{cases} a \le 0 \\ \text{et} \\ b \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le -a \\ \text{et} \\ 0 \le -b \end{cases} \Rightarrow \quad 0 \le (-a)\cdot(-b) \quad \Rightarrow \quad 0 \le (ab)$$

70 *Un carré est positif.*

$$\begin{cases} 0 \le a \\ \text{et} \\ 0 \le a \end{cases} \Rightarrow \quad 0 \le a\cdot a \quad \Rightarrow \quad 0 \le a^2$$

et $$\begin{cases} b \le 0 \\ \text{et} \\ b \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le -b \\ \text{et} \\ 0 \le -b \end{cases} \Rightarrow \quad 0 \le (-b)\cdot(-b) \quad \Rightarrow \quad 0 \le b^2$$

71 1 *est positif.* *En effet, si* $1 \le 0$ *alors* $\begin{cases} 1 \le 0 \\ \text{et} \\ 1 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 \le 1\cdot 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le 1$

et, par antisymétrie, $\begin{cases} 1 \le 0 \\ \text{et} \\ 0 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = 1$, ce qui est contraire à $1 \in \mathbb{R}^*$.

72 *Quel que soit* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *, son inverse est positif.*

Il n'est pas possible d'avoir $\frac{1}{a} \le 0$, *car* $\begin{cases} 0 < a \\ \text{et} \\ \frac{1}{a} \le 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a\cdot\frac{1}{a} \le 0 \quad \Rightarrow \quad 1 \le 0$

Démontrer que l'inverse d'un négatif est négatif.

73 *Démontrer* $\quad a \le b \quad \Leftrightarrow \quad a + c \le b + c$

74 *On peut multiplier de chaque côté par un même nombre strictement positif.*

$$\begin{cases} a \le b \\ \text{et} \\ 0 < c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le b - a \\ \text{et} \\ 0 \le c \;\text{ et }\; c \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 \le c(b-a) \quad \Rightarrow \quad 0 \le cb - ca \quad \Rightarrow \quad ca \le cb$$

75 *On peut multiplier de chaque côté par un nombre strictement négatif à condition de changer le "sens de l'inégalité".*

$$\begin{cases} a \le b \\ \text{et} \\ c < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le b - a \\ \text{et} \\ c \le 0 \;\text{ et }\; c \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le b - a \\ \text{et} \\ 0 \le -c \;\text{ et }\; c \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 \le -c(b-a)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le -cb + ca \quad \Rightarrow \quad cb \le ca$$

76 *Pour deux nombres non nuls, démontrer qu'un produit est positif si et seulement si les deux facteurs sont de "même signe".*

77 *Pour deux nombres non nuls, démontrer qu'un produit est négatif si et seulement si les deux facteurs sont de "signes contraires".*

78 $\dfrac{a}{b} \geq 0 \iff \begin{cases} a \geq 0 \text{ et } b > 0 \\ \text{ou} \\ a \leq 0 \text{ et } b < 0 \end{cases}$

$\dfrac{a}{b} \leq 0 \iff \begin{cases} a \geq 0 \text{ et } b < 0 \\ \text{ou} \\ a \leq 0 \text{ et } b > 0 \end{cases}$

79 *Pour* $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}_+^*$, $a \leq b$ et $c \leq d \Rightarrow ac \leq bd$

80 *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *démontrer par récurrence que si* n *est impair, alors* $a \leq b \iff a^n \leq b^n$

et si n *est pair, alors* $a \leq b \iff \begin{cases} a^n \leq b^n \text{ si } \{a; b\} \subset \mathbb{R}_+^* \\ \text{ou} \\ a^n \geq b^n \text{ si } \{a; b\} \subset \mathbb{R}_-^* \end{cases}$

81 *Démontrer que si* $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_-^*$, *alors* $a \leq b \iff \dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$

Avec ces exercices, on a démontré le théorème suivant.

THEOREMES

26 $a \leq b \iff a+c \leq b+c$

27 $a \leq b$ et $c \leq d \Rightarrow a+c \leq b+d$

28 $a \leq b \iff \begin{cases} ac \leq bc \text{ et } c > 0 \\ \text{ou} \\ ac \geq bc \text{ et } c < 0 \end{cases}$

29 Pour $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}_+^*$, $a \leq b$ et $c \leq d \Rightarrow ac \leq bd$

30 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si n est impair, alors $a \leq b \iff a^n \leq b^n$

si n est pair, alors $a \leq b \iff \begin{cases} a^n \leq b^n \text{ et } \{a; b\} \subset \mathbb{R}_+^* \\ \text{ou} \\ a^n \geq b^n \text{ et } \{a; b\} \subset \mathbb{R}_-^* \end{cases}$

31 Si $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_-^*$, alors $a \leq b \iff \dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$

Exercices

82 *a)* *Si* $3 < x < 7$, *encadrer* y, z *et* t *si* $y = 2x$, $z = x - 4$, $t = -4x$.

b) *Même chose si* $x \in [-1; 4]$.

c) *Même chose si* $(x+1) \in [2; 5]$.

d) *Si* $x \in [3{,}5 ; 12{,}3]$ *et* $y \in [0{,}3 ; 0{,}5]$, *à quels intervalles appartiennent* $x + y$, $x - y$, xy *et* $\dfrac{x}{y}$?

e) *Si* $x \in [4{,}5 ; 6]$ *et* $y \in [-1{,}5 ; -0{,}5]$, *à quels intervalles appartiennent* $x + y$, $x - y$, xy *et* $\dfrac{x}{y}$?

f) *Si* $x \in [-4 ; -1]$ *et* $y \in [-6 ; -2]$, *à quels intervalles appartiennent* $x + y$, $x - y$, xy *et* $\dfrac{x}{y}$?