1) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 1}{2x - 1}$

2) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

3) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 3x - 5}{x^2 + x + 1}$ *indication* $x^2 + x + 1 = x^2 + 2\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}$

$= (x + \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3}{4}$

4) $f(x) = \dfrac{x^5 + 4x^4 - 21x^3 - x^2 - 4x + 21}{x^3 - 1}$

24 *Selon le modèle suivant, trouver tous les entiers ayant une image entière par* f .

Si $f(x) = \dfrac{4x - 5}{x}$, *alors* $f(x) = \dfrac{4x}{x} - \dfrac{5}{x} = 4 - \dfrac{5}{x}$. *Il faut et il suffit que* $\dfrac{5}{x}$ *soit un entier, ou que* x *soit un diviseur entier de* 5.

Alors $f(x) \in \mathbb{Z}$ *et* $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \{1, 5, -1, -5\}$.

1) $f(x) = \dfrac{6x - 12}{x}$

2) $f(x) = \dfrac{x + 9}{x + 1}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - \frac{1}{2}x + 6}{1 - 2x}$

4) $f(x) = \dfrac{4x - 2}{2x + 1}$

3 Ordre et valeur absolue

Exercices

25 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$.

1)	$1 + 3x$	$\leq$	6	2)	$4x - 5$	$\leq$	$2x + 3$
3)	$8x + 6$	$\leq$	$13x - 1$	4)	$\frac{1}{3}x + 1$	$\geq$	x
5)	$4 + \frac{2}{3}x$	$\leq$	$7 - \frac{1}{2}x$	6)	$x(x + 1)$	$\leq$	$x^2 + 4$
7)	-1	$\leq$	$x^2 - 2x$	8)	$3x + 7$	$\leq$	$3x - \frac{1}{2}$
9)	$5(x + 2) - x$	$\geq$	$2x + m$	10)	-12	$\geq$	$3(x + m) - 4x$
11)	$27(2x + 1) - 1$	$>$	$4(3x - 2)$	12)	$\frac{5}{2}x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x$	$>$	0
13)	$-7x - 8x - 9x$	$>$	0	14)	$a^2x + 2$	$<$	$-3x + 5$
15)	$a^2x + 7x$	$\leq$	0	16)	$5(x - 2) - 3x$	$<$	$2x - 5$

26 *Justifier les équivalences.*

$$\begin{cases} ax + b > 0 \\ \text{et } \ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax > -b \\ \text{et } \ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{b}{a} \\ \text{et } \ a > 0 \end{cases}$$

Ainsi, avec $a > 0$, $ax+b > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$

$$\begin{cases} ax + b < 0 \\ \text{et } \ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax < -b \\ \text{et } \ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{b}{a} \\ \text{et } \ a < 0 \end{cases}$$

Ainsi, avec $a < 0$, $ax+b < 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$

<u>Théorème</u>

Pour $\mathbf{a \neq 0}$ **,** $\mathbf{a}$ ***et*** $\mathbf{ax + b}$ ***sont de même signe si et seulement si*** $\mathbf{x > -\dfrac{b}{a}}$ ***la racine du binôme.***

27 *Résoudre dans* $\mathbf{R}$ *selon l'exemple suivant.*

$(2x + 3)(5x - 2) \geq 0$

1) *Trouver les racines de chaque facteur et les classer.*

$2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$ et $5x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{5}$ et $-\dfrac{3}{2} < \dfrac{2}{5}$

2) *Etudier le signe de chaque facteur.*

$2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{3}{2}$ et $5x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{2}{5}$

3) *Construire le tableau des signes.*

x		$-\frac{3}{2}$		$\frac{2}{5}$	
$2x+3$	-	0	+		+
$5x-2$	-		-	0	+
$(2x+3)(5x-2)$	+	0	-	0	+

4) *Répondre à la question posée.*

$(2x + 3)(5x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -\frac{3}{2}] \cup [\frac{2}{5} ; +\infty[$

1)	$(x + 3)(x - 5) \leq 0$	2)	$(2 - x)(3 + x) \geq 0$
3)	$(1 - x)(1 + x) > 0$	4)	$(x + 1)^2 \geq 0$
5)	$4x^2 + 4x + 1 > 0$	6)	$x^2 + 9 \leq 6x$
7)	$x^2 - x < 2$	8)	$-(3 + x)(2x + 1) \geq 0$
9)	$(1 - 4x)(2 - 3x) > 0$	10)	$(x + 1)(x + 2)(x + 3) \geq 0$
11)	$x(x - 1)(x - 2) \leq 0$	12)	$(x + 1)(x^2 + 2x + 1) \geq 0$
13)	$(\frac{1}{2}x + 4)(5x + \frac{1}{2}) \geq 0$	14)	$(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4})(x^2 - 1) > 0$

15)	$(\frac{7}{8} - 3x)(x^2 - 4)$	$\leq$	0	16)	$x^3 - x^2$	$>$	$6x$
17)	$x^3 + 1$	$<$	$-3x^2 - 3x$	18)	$x^3 - 6x^2$	$\geq$	$8 - 12x$
19)	$9x^2$	$\geq$	$-6x - 1$	20)	$4x^2$	$<$	25
21)	x^2	$>$	16	22)	$9x$	$\geq$	$16x^2$
23)	$\frac{2x + 1}{2x - 1}$	$<$	0	24)	$\frac{3x + x^2}{x - 1}$	$>$	0
25)	$\frac{x + 2}{(x - 3)^2}$	$\geq$	0	26)	$\frac{5x + 3}{8 - 5x}$	$>$	0
27)	$\frac{24x + 12}{8x - 16}$	$\leq$	0	28)	$\frac{7x - 2}{\frac{1}{3}x + 1}$	$\geq$	0
29)	$\frac{5 - 11x^2}{5 - x}$	$\leq$	$11x - 3$	30)	$\frac{x^2 - 1}{(x + 2)^2}$	$\geq$	1
31)	$\frac{2}{x + 1}$	$>$	$\frac{1}{x}$	32)	$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4}$	$\leq$	$\frac{x^2 - 16}{x^2 + 6x + 8}$

28 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les inéquations paramétriques selon le modèle suivant.*

Dans une inéquation, si pour isoler x *il faut diviser les deux membres par un facteur littéral, on envisage trois cas selon que ce facteur est strictement positif, strictement négatif ou nul.*

$$(m-1)x + 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (m-1)x \geq -3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \text{ et } m > 1 \text{ et } x \geq \dfrac{-3}{m-1} \text{ et } x \in [\dfrac{-3}{m-1}; +\infty[\\ \text{ou} \\ m - 1 < 0 \text{ et } m < 1 \text{ et } x \leq \dfrac{-3}{m-1} \text{ et } x \in]-\infty; \dfrac{-3}{m-1}] \\ \text{ou} \\ m - 1 = 0 \text{ et } m = 1 \text{ et } 0x \geq -3 \text{ et } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1)	$(m + 2)x$	$\geq$	4	2)	$3x + 5$	$\leq$	$-2mx$
3)	$(4 + 3m)x$	$>$	0	4)	$x(1 + m^2) + 1$	$\geq$	0
5)	$2x + 1$	$\leq$	$3m - 2$	6)	$mx + 1$	$\geq$	$-1 - x$
7)	$\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}$	$>$	$-mx$	8)	$x(3m + 1)$	$<$	$x(2 - 4m)$
9)	$(m + 4)x$	$\geq$	$mx - 3 + 4x$	10)	$m(x - 2) - m^2$	$\leq$	0
11)	$mx - m^2$	$>$	$2x - 2m$	12)	$mx - 2$	$<$	$m(m + 3) - x$
13)	$\frac{x}{m - 1} + m + 1$	$<$	x	14)	$3x - m$	$\geq$	$\frac{3x + 1}{m + 2}$

29 *Déterminer le domaine de définition des fonctions rationnelles* f *données par leurs images* f(x) *et étudier leurs signes, c'est-à-dire donner l'ensemble des* x *tels que* $f(x) \geq 0$ *ou* $f(x) \leq 0$.

1) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x - 3}$ 2) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$ 3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x}$

4) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ 5) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x-3}$ 6) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}$

7) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{3}x+5}{\frac{1}{4}x+6}$ 8) $f(x) = \dfrac{7x+5x^2}{x^3+2x}$ 9) $f(x) = \dfrac{2x^2+11x-21}{x+1}$

Définition 8 La valeur absolue est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$|\ldots| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |x| \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x \geq 0 \ \text{ et } \ |x| = x \\ \quad\quad \text{ou} \\ x < 0 \ \text{ et } \ |x| = -x \end{cases}$$

Exercices

30 Démontrer que l'on a

a) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $|xy| = |x| \cdot |y|$

c) $|x| \geq y > 0 \Leftrightarrow x \leq -y$ ou $x \geq y$

d) $|x| \leq y$ et $y > 0 \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$

e) $|x+y| \leq |x| + |y|$

f) $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$

g) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

31 Résoudre dans $\mathbb{R}$*, selon le modèle suivant, les équations et inéquations proposées.*

1) Calculer les racines de chaque valeur absolue.

2) Classer les racines.

3) Transformer les valeurs absolues dans les intervalles fixés par les racines.

$$|x+2| - 3|x-1| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < -2 \ \text{ et } \ -x-2+3(x-1) = 0 \ \text{ et } \ x = \dfrac{5}{2} \\ \quad\quad \text{ou} \\ -2 \leq x < 1 \ \text{ et } \ x+2+3(x-1) = 0 \ \text{ et } \ x = \dfrac{1}{4} \\ \quad\quad \text{ou} \\ x \geq 1 \ \text{ et } \ x+2-3(x-1) = 0 \ \text{ et } \ x = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right\}$$

1) $|x+4| = 0$ 2) $|x+4| < 0$

3) $|x+4| \geq 3$ 4) $|2x-1| \leq 2$

5)	$\left\|\frac{1}{3}x+6\right\| = 0$		6)	$\left\|-\frac{1}{4}x+7\right\| = 0$
7)	$\left\|\frac{2}{3}x-1\right\| = 1$		8)	$\left\|1-\frac{3}{4}x\right\| \leq 1$
9)	$\|2x+3\|-1 \leq 0$		10)	$2\|x+1\|-\|2-x\| = 0$
11)	$\|3x-9\| \geq -5x$		12)	$2\|x\|-\|x+1\| < 0$
13)	$\frac{x+2}{\|x-1\|} \geq 0$		14)	$\|x+2\|+\|x+3\| \geq 5-\|x+1\|$
15)	$(m-1)\|x+1\| = 0$		16)	$2\|x-1\|-\|4x+3\| = \|5-2x\|$
17)	$\|x+1\|\cdot\|x-2\| \leq 0$		18)	$\frac{\|x+3\|}{x-2} \leq 0$
19)	$ax+\|x-1\| = 0$		20)	$\|2x+1\|-4x = 7$
21)	$\left\|\,\|x+1\|+2\right\| = 1$		22)	$\left\|\,\|x+1\|-\|x-3\|\,\right\| = \|2-x\|$