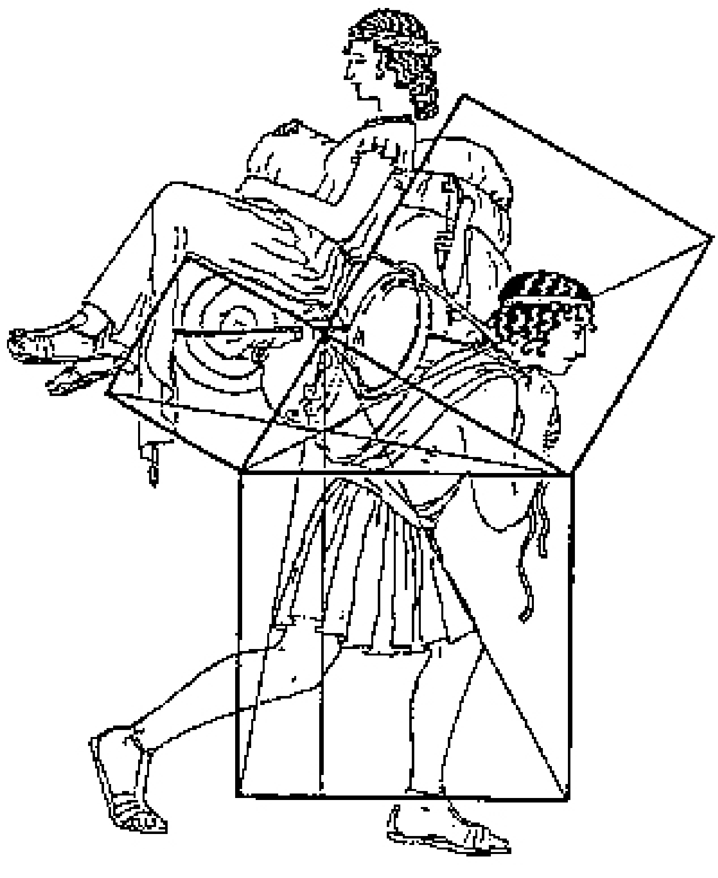
Travail de maturité :

2005-2006

Le théorème de Pythagore



Collège de l'Abbaye de Saint-Maurice

Par Gary Jacquier
4C-5C sciences

Professeur accompagnant : Pierre Frachebourg

Résumé

Pythagore est quelqu'un de bien mystérieux. Sa personne reste un mystère et son théorème l'est tout autant. A travers divers thèmes, je vais essayer de vous dévoiler les quelques propriétés de ce théorème tant connu. Après une brève approche biographique et historique du personnage et du théorème, je commence par démontrer le théorème. On remarque qu'il a une longue histoire derrière lui, énormément de gens y travaillèrent et essayèrent, à leur manière, de démontrer ce fameux théorème. Je propose des explications pour quelques démonstrations représentatives de Cabri géométrie II plus. Puis regardons le théorème de Pythagore, mais, cette fois, dans une dimension où il est peu représenté alors qu'il y est souvent utilisé, la 3ème dimension. Enfin revenons à la 2ème dimension pour montrer que Pythagore est plus qu'un simple théorème concernant le carré des côtés des triangles rectangles. Il peut être aussi généralisé à de nombreuses fonctions autres que le carré. Et pour finir je propose de montrer, à l'aide de macros, et divers autres moyens, quelles sont les autres propriétés du théorème de Pythagore et quelles sont les figures étranges que l'on peut en tirer. Le but de mon travail étant d'aborder le théorème de Pythagore sous d'autres points de vue.

Plan du TM

1. Introduction

1.1 Présentation du personnage

Sa vie

Il naît à Samos en 580 avant J.-C. et meurt à Métaponte en 490 avant J.-C. Fils de Mnésarque, Pythagore est non seulement un mathématicien, comme tout le monde le sait, mais il est aussi un grand philosophe, il aura comme disciple Parménide et Zénon et aussi un astronome. Il aura une femme qui est une de ses élèves, Théano. A 18 ans il participera même aux Jeux Olympiques. Il mourra dans l'incendie de son école, un acte criminel causé par les habitants de la ville pour venger un élève recalé.

Un voyageur

Bien qu'il soit naît à Samos, il passe la majeure partie de sa vie en Italie du Sud, à Crotone qui est alors une colonie grecque. Il voyage beaucoup pour ses études, en Gaule, en Crète et en Perse. Il passe quelques années en Ionie avec Thalès et son élève Anaximandre. Puis il va en Syrie, puis au mont Carmel au Liban et enfin il va en Egypte où il restera 20 ans.

Puis il revient à Samos (à 40 ans), mais Samos est sous la domination de Polycrate un tyran. Il part alors pour l'Italie, à Crotone où il installe son école.

On connaît bien son parcours, mais pas les chemins sur lesquels il a marché.

Son école

Il crée son école à Crotone avec l'aide financière d'un de ses habitants. "L'Ecole de Pythagore" ou "la Fraternité pythagoricienne" est une école de mathématiques et de philosophie. Très rapidement elle attirera beaucoup de monde. Son but est mystique puis politique. L'école est considérée comme une secte et pleins de tabous y demeurent, concernant les vêtements, les aliments, les relations sociales. On y étudie beaucoup de choses: la philosophie, les mathématiques, les sciences naturelles et l'astronomie. Tous les textes de l'école sont secrets et accessibles seulement aux élèves. Les cours se donnent oralement, il fallait donc une bonne mémoire. Certains disciples sont de simples auditeurs et n'ont que les résultats (acousmaticiens) et d'autres veulent les résultats avec les démonstrations (mathématiciens). Ils donnent un nombre à chaque chose et à chaque mécanisme. En politique ils soutiennent l'aristocratie, les conservateurs, ils sont contre l'anarchie.

On dit que Pythagore y est mort lors de l'incendie de celle-ci.

Ses croyances et ses découvertes

Les pythagoriciens croient que tout est nombre, que l'harmonie divine est un rapport numérique. Toutes leurs croyances sont fondées et découlent de leurs nombreuses recherches effectuées à l'école. Ils recommandaient une vie simple, austère, un contrôle de soi, de la patience. Ils croyaient également en la réincarnation. En philosophie ils vont s'intéresser à regarder la nature de la façon la plus simple, sans donner de réponses faciles (religion). C'est Pythagore qui crée le mot PHILOSOPHIE et lui donne un sens.

Tout ce qui est régit est nombre. Leur croyance, à propos des nombres, les poussent à étudier les propriétés des nombres entiers. Ils commencent à s'intéresser aux nombres pairs et impairs et aux nombres 1^{ers} et carrés, puis ils s'intéressent à la géométrie et démontrent ce fameux théorème, qui porte le nom du fondateur, Pythagore. Les pythagoriciens découvriront aussi les nombres irrationnels grâce à la diagonale du carré, qui n'est pas un multiple rationnel de son côté ($=\sqrt{2}$). L'apparition des nombres irrationnels perturbe toutes les théories déjà prononcées, il faudra alors créer de nouvelles théories adaptées aux nouvelles découvertes, en effet ils pensaient pouvoir tout représenter avec des nombres, mais qu'est-ce qui est représenté par le nombre $\sqrt{2}$, qui est irrationnel ?

Le théorème de Pythagore (ou de l'hypoténuse) s'inspire du travail des Babyloniens réalisé 1000 ans auparavant, mais Pythagore reste le premier à l'avoir démontré. Il y aura bien d'autres découvertes en math. Les Pythagoriciens feront avancer l'arithmétique à grands pas. Ils refusent l'idée que le zéro est un nombre, donc que le vide existe. Ils donnent un sens à beaucoup de nombres, par exemple le 10, qui est, pour eux, le nombre sacré, il symbolise les pouvoirs divins. Ils créent les tables de multiplication à deux entrées. Les pythagoriciens sont aussi à la base du théorème des angles intérieurs d'un triangle. Ils découvrent les 5 polyèdres réguliers, qu'ils associeront aux 4 éléments, l'eau, le feu, l'air et la terre, découverts en philosophie. Le nombre d'or apparaît pour décrire le Beau. Il faut savoir aussi qu'ils sont les premiers à fournir des démonstrations.

En astronomie, ils classent les astres connus, découvrent que la Vénus du matin et la même que celle du soir.

Beaucoup de mystères planent sur Pythagore et son école, en voici un exemple: ils observent que les astres tournent autour de la Terre, selon des orbites harmoniques[1], mais une autre

[1] http://www-cabri.imag.fr/TeleCabri/PassionRecherche/Histoire/Pythagore/Pythagore.htm

source affirme qu'ils pensaient que la Terre est une sphère et qu'elle tourne avec d'autres planètes autour du soleil, idée reprise par Copernic[2].

Ils font fait aussi certaines découvertes en acoustique, sur le rapport des longueurs des cordes et des différences d'octaves. Ils font des recherches sur la lumière et en tirent plusieurs conséquences (elle peut être réfléchie, …).

Tous les domaines scientifiques furent étudiés ce qui montre l'importance de l'école Pythagoricienne.

1.2 Présentation brève du théorème

Que nous dit le théorème de Pythagore? Il énonce que, dans la géométrie euclidienne, dans triangle rectangle, le carré du côté *c*, opposé à l'angle droit, (appelé hypoténuse) est égal à la somme des carrés des deux autres côtés *a* et *b* (appelés cathètes). Soit $a^2 + b^2 = c^2$.

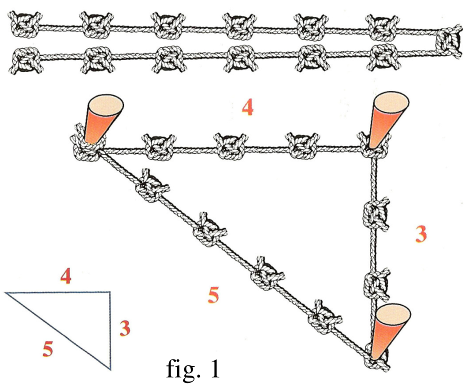


fig. 1

Comment est-il apparut ? De qui vient-il ? Au temps des Egyptiens, on se servait d'une corde à 13 nœuds. Cette corde possédait alors 12 intervalles et permettait de construire un angle droit dans un triangle de dimensions 3-4-5. On utilisera cette corde durant tout le Moyen-âge (cf. fig. 1[3]).

On découvre aussi qu'en -2500 en Grande-Bretagne, on connaissait déjà les triplets pythagoriciens, ainsi qu'à Babylone en -1800. Ce qui montre qu'un soupçon du théorème de Pythagore s'était déjà développé.

La démonstration est attribuée à Pythagore, bien qu'Euclide fût le premier à écrire un livre citant le théorème.

La propriété des triangles rectangles est aussi développée en Chine, où l'on propose une démonstration qui ne ressemble en rien à celle de Pythagore.

En Inde on propose une démonstration numérique sur des cas particuliers, mais qui pourrait aisément être généralisée.

On remarque que les caractéristiques du triangle rectangle avaient été employées, exploitées bien avant Pythagore. On peut dire aussi que le théorème de Pythagore n'est pas l'œuvre

[2] http://www.ac-nancy-metz.fr/pres-etab/avrils/product/biografi.htm
[3] image tirée du livre **Pythagore & Thales**

propre de Pythagore, mais plutôt une œuvre complétée au fil des époques et que chaque civilisation y a mis du sien pour essayer de définir ce qu'ils pressentaient, ce qu'ils avaient remarqué. Chaque civilisation a apporté quelque chose au théorème et chacune, représentée par un grand personnage, a tenté de démontrer cette propriété. Euclide en fit plusieurs démonstrations, il en rédigea certaines. Les chinois et les hindous firent beaucoup de démonstrations grâce à la technique du puzzle (cf. 2.1). Les arabes les redécouvrirent au IX^{e} siècle. Même le 20ème président des Etats-Unis s'y essaya, et démontra le théorème, en avril 1876, en s'appuyant de la figure des chinois.
Il existe de la sorte, pour chaque époque, civilisation, une démonstration différente du théorème. Le nombre de démonstrations possibles et de l'ordre d'environ 500. Il y a beaucoup de démonstrations analytiques, mais encore plus de démonstrations géométriques.

1.3 Remarques

On ne sait pas exactement qui est Pythagore et d'où vient ce théorème. Beaucoup de mystères planent sur cet être hors norme. Certains prétendent qu'il aurait pu être une femme. Les informations à son propos sont divergentes suivant les sources auxquelles on se fie. Certaines sources prétendent, par exemple, qu'il croyait que la Terre était le centre de l'univers alors que d'autres sont claires et disent qu'il savait que les planètes tournaient autour du soleil et non pas autour de la Terre (cf. 1.1 ses croyances). Comment savoir ce qui est vrai? Il faut aussi se rappeler qu'il a vécu au V^{ème} siècle avant J.-C. donc il est normal que les choses le concernant n'ont pas pu être toutes conservées. Il est déjà remarquable d'avoir encore autant de détails à son sujet, même certains détails sur des petites choses ont été conservés et ont pu nous être transmis.

2. Aspect mathématique

2.1 Démonstration du théorème

Il existe de nombreuses façons de démontrer le théorème de Pythagore. Avec l'aide de Cabri, je vais me diriger principalement sur l'aspect géométrique de certaines démonstrations. Cabri nous permet de les rendre très dynamiques.
A l'aide de nombreuses ressources, je vais montrer quelques démonstrations intéressantes.

2.1.1 Euclide (cf. *211Euclide.fig*)

Avant de commencer sa démonstration, Euclide commence par expliquer les différentes étapes qu'il utilisera. Tout d'abord il nous fait remarquer que si une surface S est coupée en deux morceaux, la somme des aires de ces deux morceaux est égale à l'aire de la surface S, chose facilement compréhensible. Il nous montre aussi qu'une surface ne change pas d'aire si elle est déplacée, tournée, ... Et le dernier élément, qui est souvent repris dans beaucoup de démonstrations, nous affirme qu'un parallélogramme ne change pas d'aire si on déplace un de ses côtés parallèlement à son côté opposé (cf. *propriétés Euclide.fig*)

La démonstration d'Euclide commence d'abord en faisant glisser le sommet C du triangle $A'BC$, qui est en fait la moitié du carré, sur le côté b afin de rendre un côté du triangle égal au côté c. Puis il fait tourner le triangle autour du point B, d'un angle de 90°. Le sommet A est alors rabattu sur le côté b' du carré, en B' exactement et le point A' prend place sur le point C, le tout en respectant l'aire, comme il nous l'a démontré plus haut. A ce moment le point A' (C) est rabattu sur le côté c. Ainsi le triangle occupe une certaine aire dans le carré c^2. Procédant de la même façon pour l'autre carré on obtient ainsi deux triangles dans le carré d'aire c^2. Et nous remarquons que ces deux triangles représentent la moitié de l'aire du carré. Etant donné que nous avions pris la moitié des deux carrés, nous pouvons dire alors que l'aire totale du carré est égale à l'aire des deux autres carrés. Soit : $a^2 + b^2 = c^2$ (cf. fig. 2).

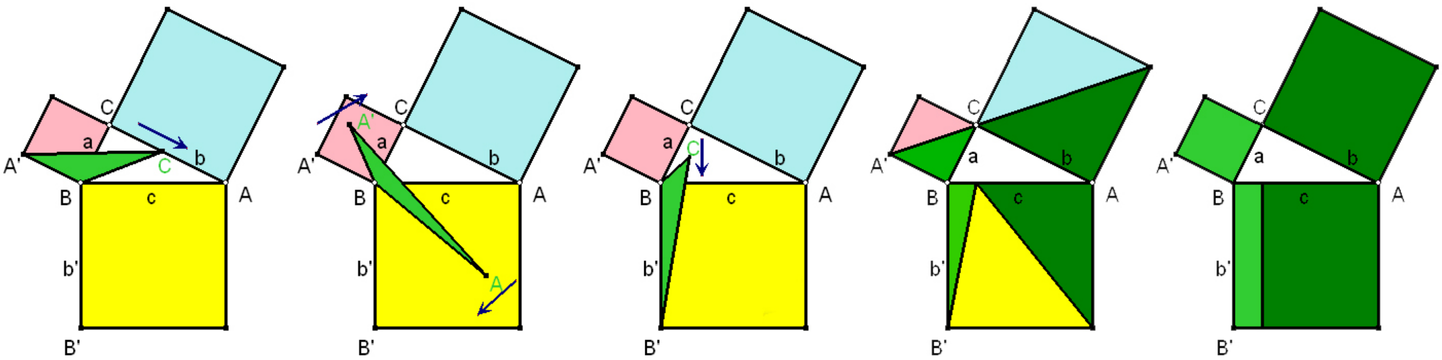


fig. 2

2.1.2 Hermann Baravalle (1945) (cf. *212Baravalle.fig*)

La démonstration est très simple et facile à comprendre. Tout d'abord on déplace les deux côtés des carrés opposés aux côtés du triangle. Ceci est possible car l'aire du parallélogramme ne change pas, en effet, la base reste la même et la hauteur aussi. Ensuite on remarque que le segment commun des deux parallélogrammes "glisse" vers le bas. Même propriété que celle qui est décrite ci-dessus, l'aire reste la même. Enfin, les deux rectangles prennent la place du carré sous l'hypoténuse et l'on remarque qu'ils le remplissent exactement (cf. fig. 3).

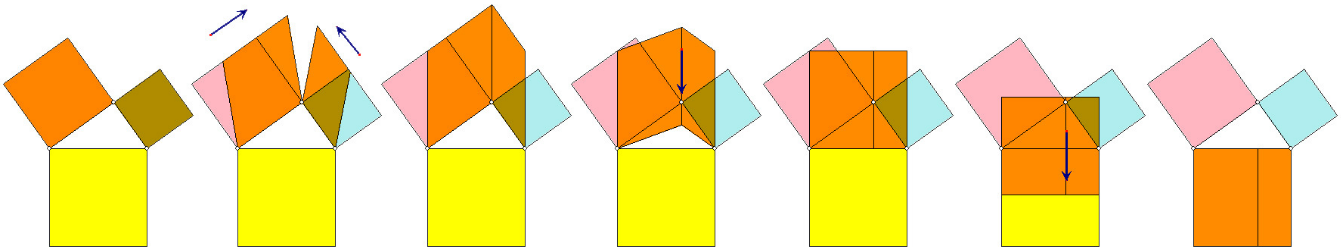


fig. 3

2.1.3 Selon les chinois (cf. *213slc.fig*)

Démonstration fascinante, de par sa simplicité. Nous commençons la démonstration avec un grand carré dans lequel sont dessinés, dans chaque coin, 4 triangles semblables dont 2 de leur sommets sont communs avec 2 autres triangles, de la sorte nous avons que $a+b=$côté du grand carré. Ainsi nous avons au milieu un carré qui est égal au carré de l'hypoténuse c des triangles dessinés. L'astuce consiste à faire pivoter les deux triangles inférieurs pour les juxtaposer avec ceux du haut afin de former deux nouveaux rectangles sur la partie supérieure du grand carré. Il nous reste à descendre un des rectangles jusqu'au côté opposé. Nous avons, désormais, deux carrés verts dont l'aire de l'un est égale à b^2 et l'aire de l'autre est égale à a^2. Nous constatons donc que nous sommes partis d'un carré d'aire c^2 et désormais nous en avons deux dont l'aire totale est égale à a^2+b^2. Puisque les triangles ont justes été déplacés et tournés, il n'y a donc pas eu de changement d'aire (cf. fig. 4).

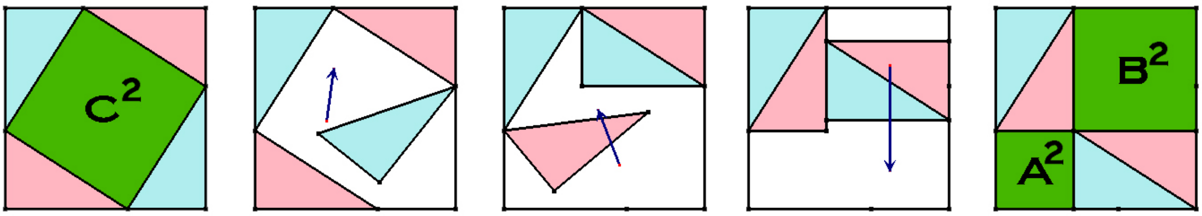


fig. 4

2.1.4 Bhaskara (hindou) (cf. *214Bhaskara.fig*)

Cette démonstration est, en fait, un mélange de deux démonstrations: le début est tiré d'une figure chinoise, qui est une démonstration en elle même, puis l'hindou Bhaskara arrangea les morceaux pour le démontrer d'une autre façon. Tout d'abord nous possédons un triangle rectangle en C, puis nous y ajoutons un carré, collé au côté b et dans le coin C, de grandeur $b-a$ (cf. fig. 5). Désormais il faut effectuer une rotation du triangle autour du carré, il crée, de la sorte, trois autres triangles rectangles et dans le tout nous avons créé un carré de côté c (cf. fig. 6). Donc $c^2=$ aires du petit carré + l'aire des 4 triangles semblables, ce qui donne :

$$c^2=(b-a)^2+4\cdot(\frac{1}{2}\cdot a\cdot b)=a^2+b^2$$

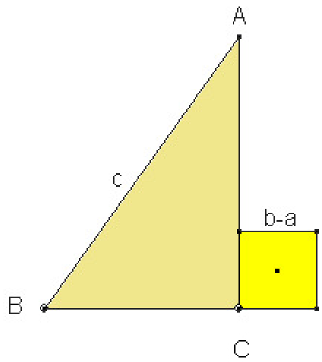


fig. 5

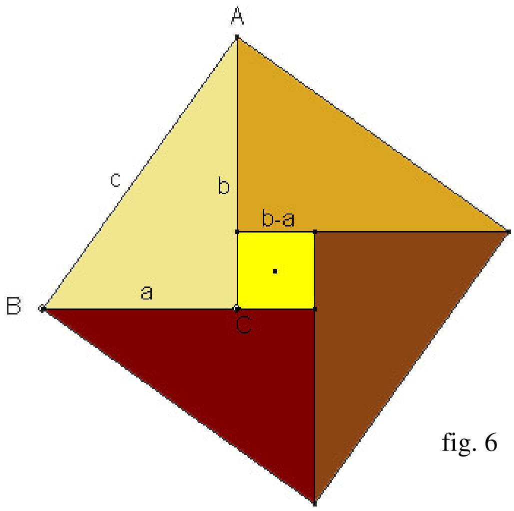


fig. 6

Bhaskara , lui, ne procède pas au calcul, mais il tourne le triangle supérieur gauche de façon à ce qu'il se juxtapose au triangle inférieur gauche. Et il fait de même avec le triangle supérieur droit contre le triangle inférieur droit. Il obtient ainsi en distinguant les carrés, un carré de côté *a* et un autre carré de côté *b* (cf. fig. 7 et *dém 4 Bhaskara.fig*)

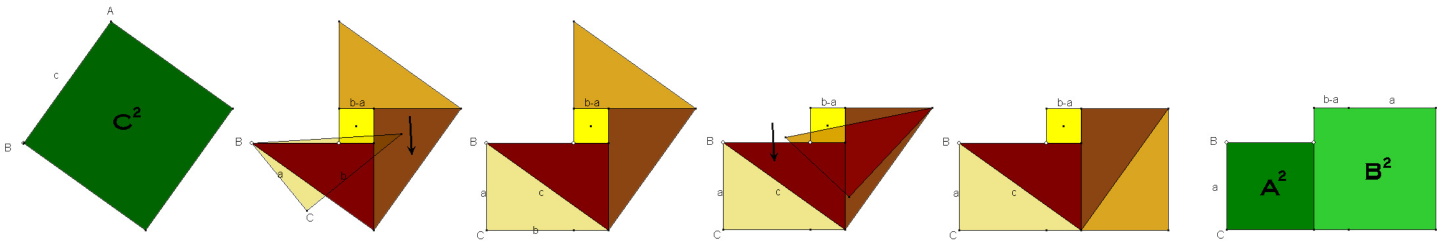


fig. 7

2.2 Script de la construction de la démonstration de Bhaskara

Construisons deux droites, perpendiculaires l'une à l'autre, *dv* et *dh*, l'intersection des deux droites est appelée *C*. Le point *A* appartient à *dv* et *B* à *dh*. Ainsi nous avons un triangle *ABC*, rectangle en *C*. Il faut maintenant créer un carré, de côté *b-a*, qui soit juxtaposé au côté *AC* et dont l'un de ses sommets soit *C*. Faisons alors en *A* un cercle *v* de rayon *BC* et construisons le point d'intersection entre ce cercle et le segment *[AC]*, nommé *C1*. Grâce à ce point *C1* nous pouvons finir le carré, *CC3C2C1* de côté $b-a$ (cf. fig. 8).

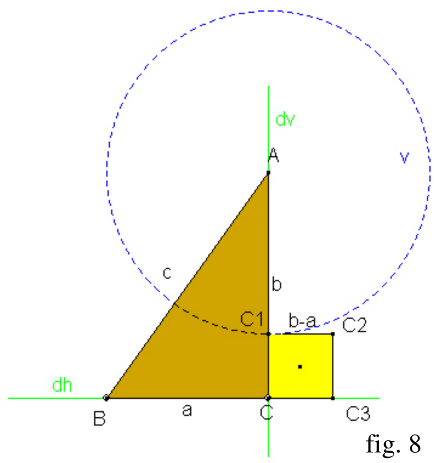


fig. 8

Grâce à de nombreuses macros, il aurait fallut désormais faire tourner le triangle autour du point qui est le milieu du carré de côté $b-a$. Je vais simplement montrer comment construire la figure finale, sans animation car le script serait rallongé de quelques pages. Ce qu'il nous faut, c'est un carré de côté *AB* qu'il faut construire soit à l'aide d'une macro, ou simplement avec les objets mis à disposition. Construisons la perpendiculaire *p* au segment [*A;B*] par le

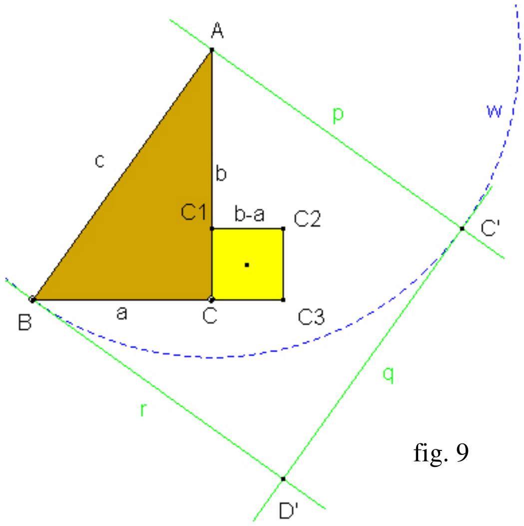


fig. 9

point *A*, puis grâce à l'outil <u>cercle</u>, construisons le cercle *w* centré en *A* de rayon *AB*. Nous avons alors le troisième point *C'* de notre carré, qui est l'intersection du cercle et de la droite précédemment construite. Ensuite pour compléter le carré il suffit de prendre la parallèle *q* en *C' à* la droite (*BA*) et l'orthogonale *r* en *B* à la droite (*BA*), et ainsi, l'intersection nous donne le point *D'* qui est le dernier point de notre carré de côté *c*. (cf. fig. 9)

On peut alors construire les 3 autres triangles qui sont semblables au premier construit : soit, les triangles *AC1C'*, *C'C2D'* et *C3BD'*. Ainsi nos 4 triangles et le carré de côté *b-a* forment un grand carré de côté *c*. (cf. fig. 10)

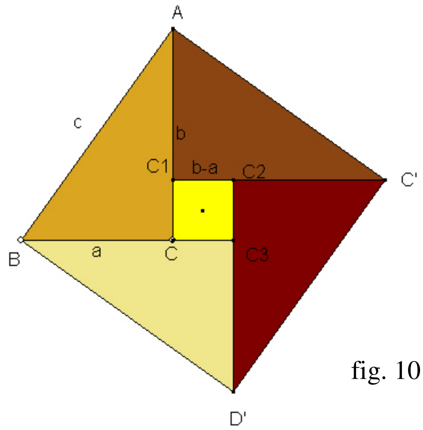


fig. 10

Il reste à montrer que ce grand carré de côté *c*, est égal à la somme des aires de deux carrés de côté *a* et *b*. Pour cela il suffit de faire tourner de 90° le triangle *ABC* autour du point *B* dans le sens horaire et le triangle *AC'C* autour du point *C'* dans le sens antihoraire afin de créer deux carrés d'aire a^2 et b^2. Pour cela utilisons l'outil <u>nombre</u> et entrons un nombre *270* (qui correspondra à des degrés) puis avec l'outil <u>rotation</u> demandons de faire tourner le point *A* autour de *B* d'un angle de *270°* pour créer le point *A'* (qui est en fait *D'*). Puis faisons la même manipulation avec le point *C* afin de créer *C''*. Pour le deuxième triangle il faut alors entrer un nouveau nombre *90* cette fois, car la rotation avec Cabri se fait dans le sens contraire des aiguilles de la montre. Donc procédons aux mêmes manipulations qu'auparavant, faisons tourner le point *A* autour de *C'* d'un angle de *90°* pour obtenir le point *A''* (qui est *D'*), et de même avec le point *C1* pour avoir le point *C1'*. Nous pouvons construire alors les deux triangles *BC''D'* et *D'C1'C'*. Une dernière manipulation reste à faire : construire le point *F* qui est le projeté orthogonal du point *C* sur le segment [*C'' ;D'*]. (cf. fig. 11).

Il reste à construire les deux carrés *BC''FC* et *C1FC1'C'* et nous constatons que l'un possède une aire de a^2 et l'autre une aire de b^2. (cf. fig. 12).

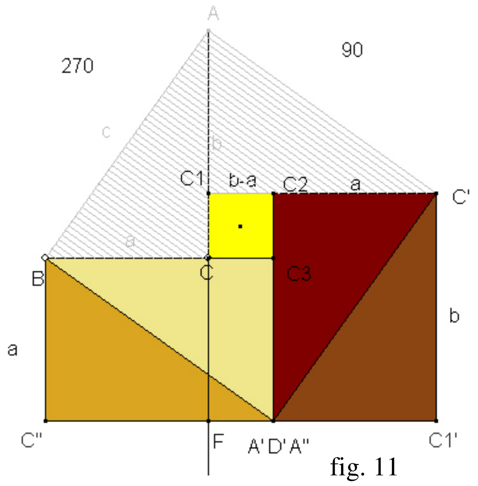


fig. 11

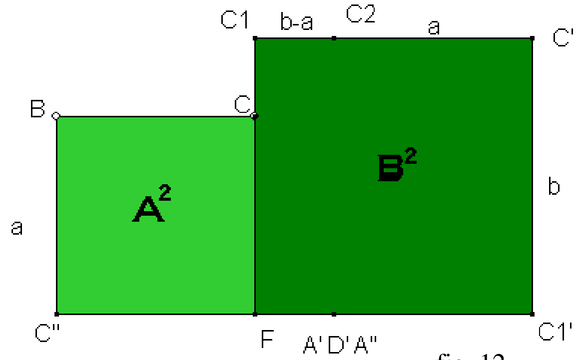


fig. 12

Il est possible de procéder à une vérification en demandant l'aire du carré de côté c initialement créé, puis de demander l'aire des deux carrés de côtés a et b avec l'outil <u>aire</u> et avec l'outil <u>calculatrice</u> il suffit de calculer la somme des aires des carrés BC''FC et C1FC1'C' pour voir que le résultat est le même que l'aire du carré d'aire c^2.

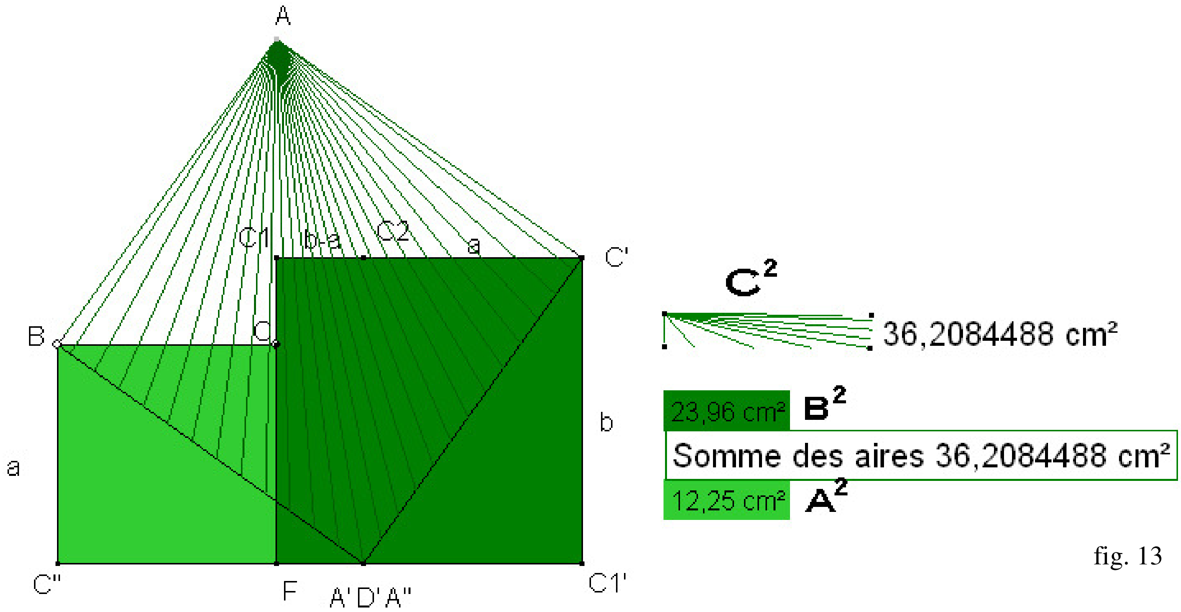


fig. 13

Sur cette figure (cf. fig. 13), je représente le carré d'aire c^2 avec les carrés d'aire a^2 et b^2 afin de voir ensemble le carré d'origine *ABD'C'* et la figure finale avec les carrés *BC''FC* et *C1FC1'C'*. Le carré *ABD'C'* est hachuré pour une meilleure visualisation. A droite de la figure se trouve la simple vérification numérique que $a^2 + b^2 = c^2$.

2.3 Puzzle

Il faut aussi savoir que le théorème a été fréquemment démontré à l'aide de puzzle. Le principe est simple, il suffit de diviser les carrés des cathètes afin de pouvoir glisser les morceaux obtenus dans le carré sur l'hypoténuse.

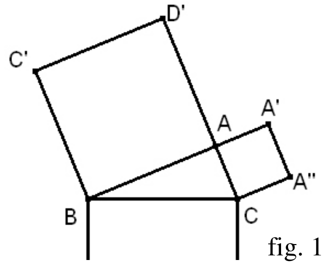


fig. 14

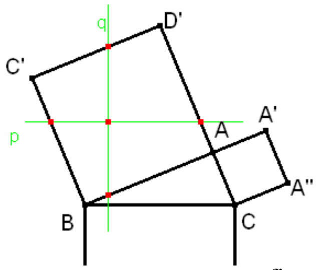


fig. 14bis

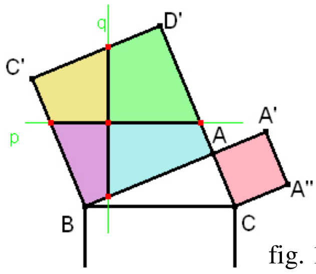


fig. 15

En voici un exemple détaillé, il s'agit du puzzle de Périgal :
Le principe, ici, est très simple, il faut séparer en 4 parties le carré des cathètes dont l'aire est la plus grande (ici, le carré *AD'C'B* (cf. fig. 14)) de façon à ce que la figure finale ait un meilleur rendu. Pour séparer ce carré en morceaux de puzzle, il faut construire: la parallèle p à la droite (BC) sur le segment [AD'], de manière à ce qu'elle coupe le segment [$C'B$], et l'orthogonale q à cette nouvelle droite sur le segment [$C'D'$], de manière à ce qu'elle coupe le segment [BA]. De la sorte notre carré est coupé en 4 parties, dont chacune possède 2 angles droits (cf. fig. 14bis). Pour cette démonstration, le plus petit carré n'est pas divisé, il est une pièce à lui seul. Maintenant il faut rendre ces parties « concrètes ». Pour cela il faut créer les polygones qu'ils représentent (cf. fig. 15). Le principe du puzzle ne s'arrête pas là, car à ce niveau nous n'avons encore rien prouvé. Alors par translation des polygones, avec des vecteurs différents, nos 5 polygones (4 construits + le petit carré) sont désormais libres. Voilà la création des pièces de notre puzzle (cf. fig. 16).
Il reste alors à reconstruire le puzzle de manière à ce que chaque pièce trouve sa place dans le carré de l'hypoténuse (cf. fig. 17) (cf. *puzzle essai.fig* et *puzzle solution.fig*).

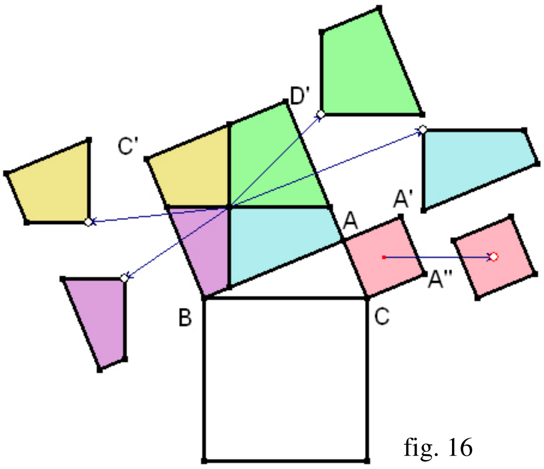


fig. 16

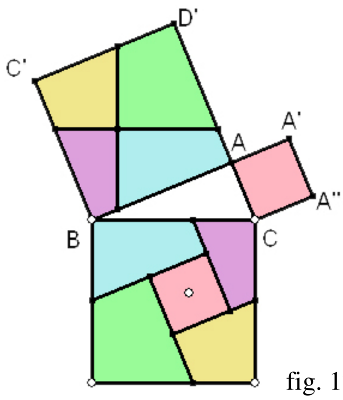


fig. 17

Et de cette façon nous avons prouvé que $a^2 + b^2 = c^2$.

Il existe de nombreuses manières de démontrer le théorème de Pythagore grâce à des puzzles, en voici quelques unes (cf. fig. 18):

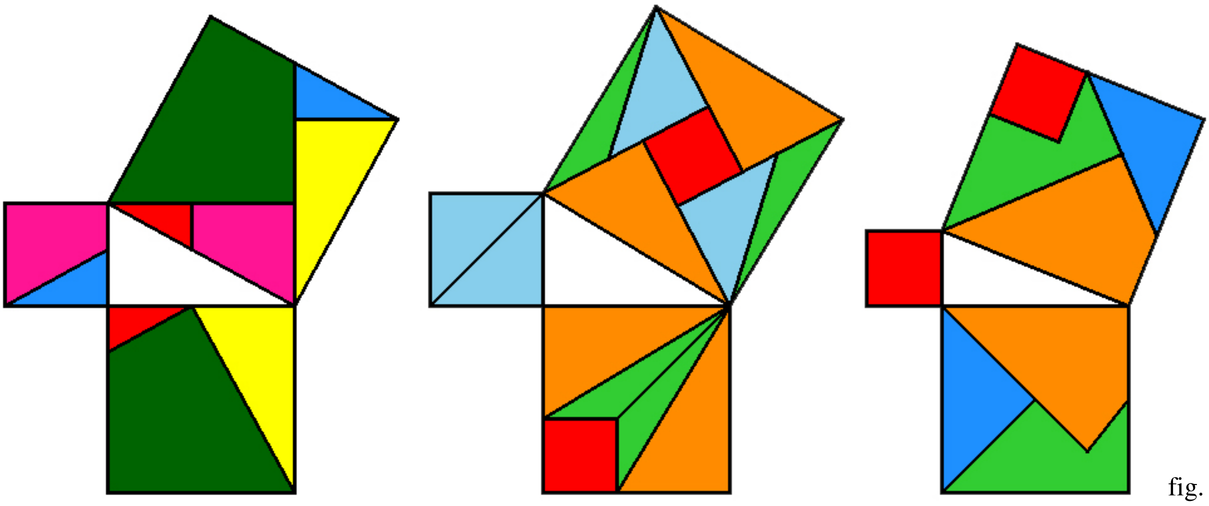


fig. 18

Les possibilités de démontrer Pythagore avec des puzzles sont immenses. Chaque puzzle a sa particularité, mais tous respectent les propriétés qu'Euclide nous a démontrées plus haut (cf. 2.1). Chaque pièce conserve son aire, mais elle subit une translation et, quelque fois, une rotation ou une symétrie.

2.4 Théorèmes et constructions fondés sur Pythagore.

Beaucoup de théorèmes, de propriétés sont fondés sur le théorème de Pythagore. Dans la trigonométrie par exemple, on connaît la formule : $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ qui vient du théorème de Pythagore. Enormément de problèmes se résolvent grâce au théorème de Pythagore, en géométrie surtout. Voici quelques théorèmes ou figures, démontrés ou construites, grâce à Pythagore:

2.4.1 Théorème de la hauteur

Il affirme que, dans un triangle rectangle, "le carré de la hauteur relative à l'hypoténuse est égale au produit de la longueur des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse"[4]. Soit $h^2 = a'\cdot b'$. Démonstration en s'appuyant sur le théorème de Pythagore :

ABC est un triangle rectangle, *a*,*b* et *c* les trois côtés, *h* la hauteur issue de l'hypoténuse et *a'*,*b'* les deux segments que la hauteur sépare sur l'hypoténuse (cf. fig. 19).

$$c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a'+b')^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a'^2 + 2a'b' + b'^2 = a^2 + b^2,$$

de plus
$$a^2 = a'^2 + h^2 \Leftrightarrow a^2 - h^2 = a'^2$$
$$b^2 = b'^2 + h^2 \Leftrightarrow b^2 - h^2 = b'^2$$

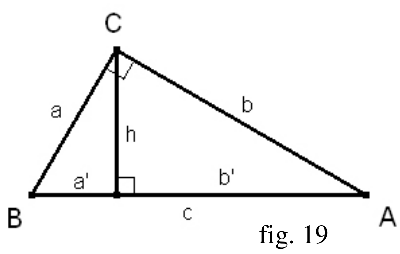


fig. 19

[4] http://webplaza.pt.lu/hicharel/Pythagore/Pythagore.pdf p.10

d'où $(a^2 - h^2) + 2a'b' + (b^2 - h^2) = a^2 + b^2 \Leftrightarrow -2h^2 + 2a'b' = 0$

$\Leftrightarrow 2a'b' = 2h^2 \Leftrightarrow a'b' = h^2$

2.4.2 Théorème d'Euclide

Les hypothèses sont les mêmes que pour le théorème de la hauteur (cf. 2.4.1) (cf. fig. 20).

Il énonce que $a^2 = a' \cdot c$ et que $b^2 = b' \cdot c$.

Par Pythagore : $c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a'+b')^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a'^2 + 2a'b' + b'^2 = a^2 + b^2$, c'est le même procédé que pour le théorème de la hauteur. De plus $b^2 = b'^2 + h^2$ ce qui nous donne : $a'^2 + 2a'b' + b'^2 = a^2 + b'^2 + h^2$ et nous savons par le théorème de la hauteur que $h^2 = a'b'$. D'où $a'^2 + 2a'b' + b'^2 = a^2 + b'^2 + a'b' \Leftrightarrow a'^2 + a'b' = a^2 \Leftrightarrow a'(a'+b') = a^2 \Leftrightarrow a'c = a^2$.

Pour obtenir la solution en b^2 il suffit de faire le même procédé, mais cette fois pour le côté *b* du triangle.

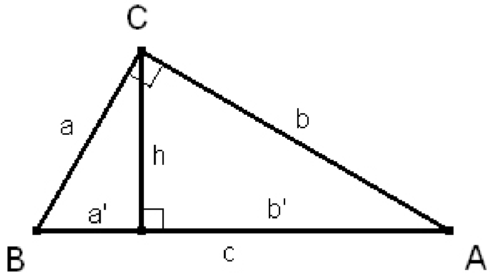


fig. 20

2.4.3 Le nombre d'or

Le nombre d'or est comme le théorème de Pythagore, il provient et a était utilisé par de nombreuses civilisations, à différentes époques. C'est le nombre qui représente le nombre divin, la perfection. Il est approximativement égal à 1.618. C'est en fait la solution positive de l'équation : $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ qui est : $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Toutefois ce nombre peut aussi être construit grâce à Pythagore[5] :

Les hypothèses sont : un segment *[A;B]*, le point *D* milieu de *[A;B]*. La droite *d* perpendiculaire au segment *[A;B]* en *B*. Le cercle *c* d'origine *B* de rayon *AD*. *E* le point d'intersection de la droite *d* et du cercle *c*. Le cercle *d* d'origine *E* et de rayon *EB*. Le point d'intersection *F* du cercle *d* et du segment *[A;E]*. Le cercle *e* d'origine *A* et de rayon *AF* et pour finir le point d'intersection *C* du segment *[A;B]* avec le cercle *e* (cf. fig. 21).

[5] construction et démonstration : *construction-or-demonstr.fig* de M. Frachebourg

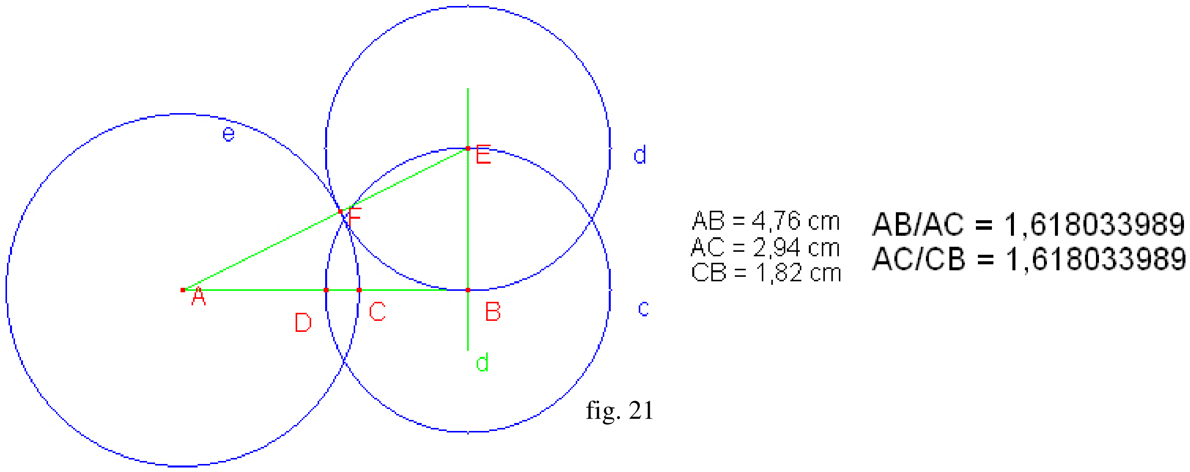


fig. 21

La thèse énonce que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \varphi$. La démonstration :

Le triangle ABE est rectangle en B, donc par Pythagore : $AE^2 = AB^2 + BE^2$, or $AE = AF + FE$ et $FE = BE = \frac{1}{2}AB$ d'où $AE^2 = AB^2 + BE^2 \Leftrightarrow (AF + FE)^2 = AB^2 + BE^2$ $\Leftrightarrow AF^2 + 2AF \cdot FE + FE^2 = AB^2 + BE^2 \Leftrightarrow AF^2 + 2AF \cdot FE = AB^2$ or $AF = AC$ et $FE = \frac{1}{2}AB$ d'où $AC^2 + 2 \cdot AC \cdot \frac{1}{2} \cdot AB = AB^2$ or $AC = AB - BC$ donc

$$AC^2 + (AB - CB) \cdot AB = AB^2 \Leftrightarrow AC^2 + AB^2 - CB \cdot AB = AB^2 \Leftrightarrow AC^2 - CB \cdot AB = 1$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = CB \cdot AB \Leftrightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$$ (cf. résultats fig. 21)

Ainsi, avec la simple hypothèse que le triangle ABE est rectangle en B, nous pouvons démontrer toute la construction du nombre d'or.

3. Pythagore et la 3D

Toutes les figures réalisées sur la 3ème dimension sont disponibles dans le fichier *pytha 3D rot anim.fig*.

3.1 Figure

Nous en parlons souvent dans un triangle rectangle, mais comme nous l'avons vu, le théorème de Pythagore est omniprésent, même

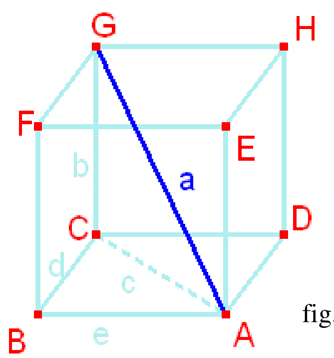


fig. 22

en trois dimensions. Dans un cube, que dire de la grande diagonale a ?

On sait, par Pythagore, que $a^2 = b^2 + c^2$. Or $c^2 = d^2 + e^2$. On peut en conclure que $a^2 = b^2 + d^2 + e^2$. Autrement dit : la longueur de la grande diagonale au carré vaut la somme des longueurs des arrêtes (longueur, profondeur, hauteur) au carré. Comme nous travaillons dans un cube, et que $b = d = e$, alors $a^2 = 3 \cdot b^2$.

Et *a=AG, b=CG, c=AC, d=BC, et e=AB* (cf. fig. 22).

Mais que cela représente-il vraiment en 3D?

Voilà ce que nous donne l'image en 3D, avec cette fois, les 4 carrés (de la formule $a^2 = b^2 + d^2 + e^2$) dessinés (cf. fig. 23). Ce que l'on peut dire alors, c'est que la somme des 3 petits carrés de même taille est égale à l'aire du grand. Donc comme auparavant, dans la démonstration du théorème de Pythagore, il doit être possible de diviser ces carrés de sorte à ce qu'ils remplissent le grand carré (bleu)!

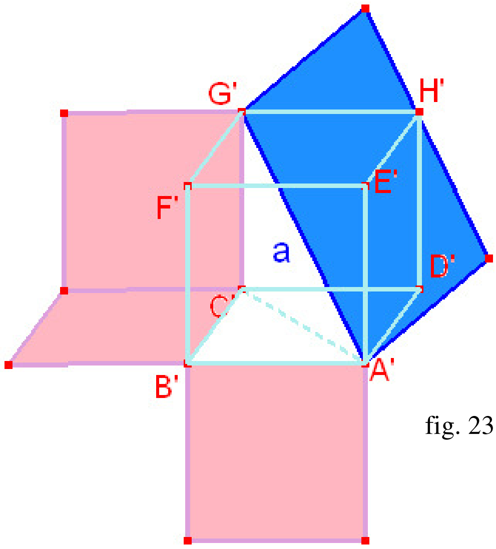


fig. 23

3.2. Démonstration

De quelle manière faudrait-il diviser les petits carrés afin de reconstruire le grand? La solution m'est donnée dans un livre[6], mais seule l'image l'évoque et il n'y a pas plus d'informations à ce sujet. J'essaie alors de refaire cette figure avec mes moyens, en ayant un modèle. Comment faire rentrer 3 carrés identiques dans un seul carré dont sa grandeur nous est donnée par $a^2 = 3 \cdot b^2$ (cf. fig. 24)? L'astuce, une fois trouvée, est assez simple.

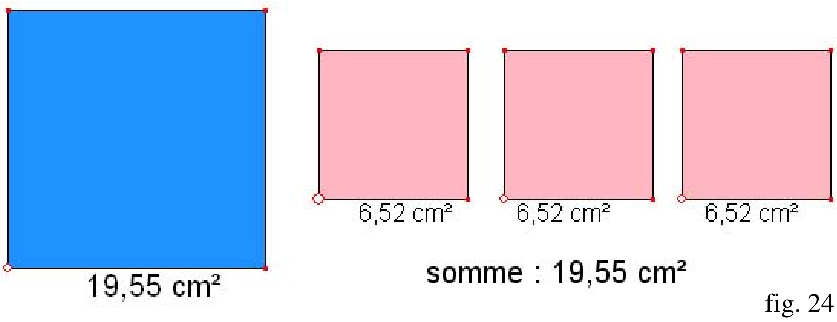


fig. 24

[6] **Pythagore et Thalès** – Les éditions du Kangourou

Il suffit de diviser deux de ces carrés en deux, de placer chaque angle droit des moitiés dans les 4 angles droits du carré, mais il ne faut pas superposer les angles droits, sinon il n'y a plus de place pour faire rentrer le dernier carré. L'astuce est qu'il faut légèrement les décaler du bord, de façon à ce que l'ensemble des triangles forment à l'intérieur du carré bleu, un autre petit carré qui est de même aire que le dernier carré qu'il nous reste à insérer (cf. fig. 25).

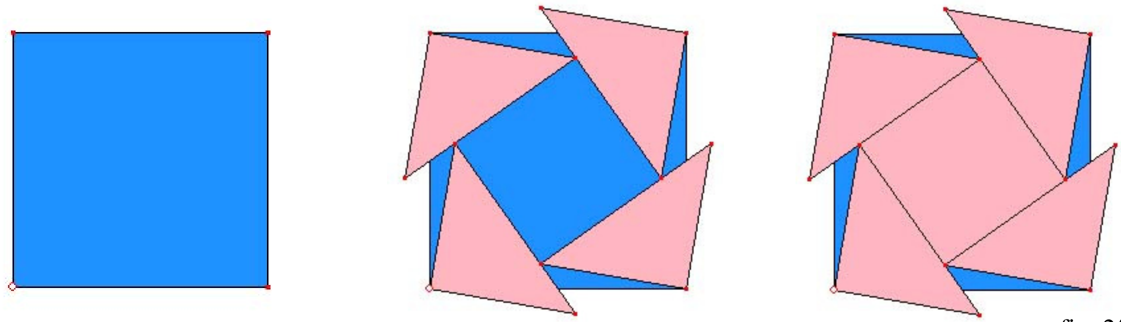


fig. 25

Bien sûr la figure est étrange, elle nous semble fausse car on remarque aisément que le carré bleu n'est pas rempli totalement. Mais, en fait, l'aire des triangles, qui est à l'extérieur du carré bleu, remplit parfaitement l'aire qu'il manque à l'intérieur.
Voilà donc une autre démonstration du théorème de Pythagore, mais cette fois, sur une base en trois dimensions.

3.3 Généralisation

Le théorème de Pythagore peut s'appliquer à un cas plus général dans l'espace. Un parallélépipède rectangle aurait pu généraliser le travail ci-dessus présenté, mais par le simple fait que Pythagore travaille en général sur des carrés, je l'ai fait avec un cube. Il faut savoir que le théorème, que nous soyons en 3 dimensions ou en 2 dimensions, travaille toujours sur des plans, donc en 2 dimensions. C'est pour cela que dans les calculs que l'on fait pour savoir à quelle distance se situe telle et telle chose par rapport à son ombre ou autre, on emploie Pythagore, mais de nouveau, dans un plan.
Peut-être qu'il existe une vraie extrapolation du théorème de Pythagore dans le monde de la $3^{ème}$ dimension du genre : $a^3 + b^3 = c^3$? Ou dans une dimension n : $a^n + b^n = c^n$?
Pierre Fermaz a montré, en 1637, que cette conjecture n'est pas possible. Andrew Wiles l'a démontré en 1995. En effet il n'existe pas de nombres réels positifs *a,b,c* tels qu'ils vérifient la propriété $a^n + b^n = c^n$, pour n'importe quel nombre n supérieur à 2

On peut donc laisser tomber l'idée qu'il existe des cubes, par exemple, construits à partir d'autres cubes suivant la relation $a^3 + b^3 = c^3$.

4. Approfondissement

4.1 Extrapolation

Le théorème de Pythagore peut être généralisé, on l'appel aussi le théorème d'al-Kashi. On le connait sous la forme : $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\chi)$ ou χ est l'angle opposé au côté *c*. Je ne vais pourtant pas vous en parler plus longtemps, je me préoccupe d'une autre sorte de généralisation.

Ayant remarqué que le carré de l'hypoténuse est égal au carré de l'adjacent *plus* le carré de l'opposé, je me demande alors pourquoi le carré? Y aurait-il une autre fonction pour laquelle cette propriété serait aussi vérifiée ex.: sin(a) + sin(b) = sin(c)? On remarque bien que cela ne joue pas. Alors comment comprendre le problème $a^2 + b^2 = c^2$?

Le carré représente, en fait, un carré qui est posé sur le côté du triangle. (cf. fig. 26 et *pytha carre.fig*)

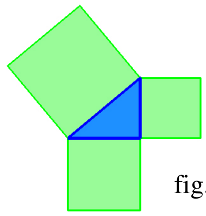


fig. 26

Alors la question s'éclaire, le théorème de Pythagore prend son sens aussi en géométrie: c'est une aire! Alors si à la place d'un carré je construis un rectangle, est-ce que cela marche? Est-ce que l'aire de la forme qui se trouve sur le plus long côté est égale à la somme des aires sur les deux plus petits côtés? Et oui, mais à une condition majeure: il faut que les rectangles soient semblables, c'est-à-dire que le rapport de leur largeur sur leur longueur doit être, pour les trois rectangles, le même (cf. *pytha rectangle.fig*). Cette propriété est aussi présente dans le théorème "normal" de Pythagore. J'essaie de ne pas en rester là et je pousse cette découverte un peu plus loin: l'aire d'un rectangle c'est la base *fois* la hauteur, or, pour le parallélogramme, la formule de l'aire est la même et, de plus, la hauteur comme la base sont les mêmes donc par simple translation du côté opposé au triangle je découvre alors encore une nouvelle figure très intéressante. (cf. *pytha parallélogramme.fig*). Mais alors est-ce que cette découverte est universelle? J'essaie donc d'autres figures, d'autres manières, et je remarque grâce aux aires, que cela marche pour n'importe quelle figure géométrique et de plus pour n'importe quel objet: forme d'ours, papillon, … (cf. fig. 27).

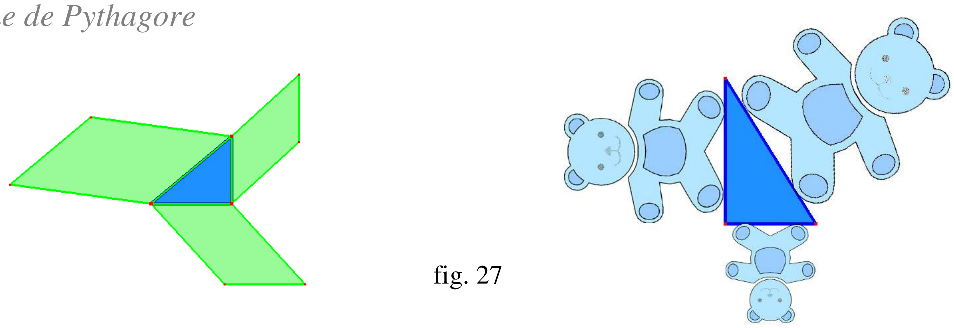


fig. 27

Maintenant je me pose la question : mais qu'est-ce que l'aire? En mathématique analytique c'est l'intégrale d'une fonction, c'est-à-dire l'aire qui se trouve entre la courbe et l'axe *Ox*. Donc regardons de cette façon le théorème de Pythagore. La formule de Pythagore peut être traduite par l'aire sous une courbe. Mais laquelle? On sait que l'aire sous la courbe est égal à a^2, donc il suffit d'intégrer et de trouver la fonction ayant comme aire entre 0 et a (longueur du segment), a^2 ainsi je trouve la fonction $y = a$. Soit en math : $\int_0^a a \cdot dx = a \cdot x\big|_0^a = a^2$ (cf. fig. 28)

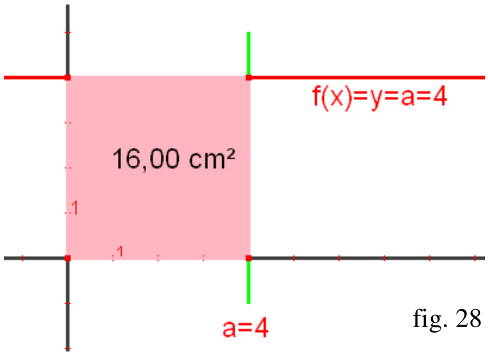


fig. 28

Comment alors le comprendre, le réaliser? Il suffit de poser les axes *x* sur les côtés des triangles et les axes y perpendiculairement à ceux-ci. Un problème se dégage: quelle est l'unité que l'on doit choisir? Et là je me rappelle qu'auparavant mes figures devaient être semblables donc appliquons cette méthode aux axes *x* et *y*, l'unité sera alors pour chaque côté, leur propre mesure. De la sorte les côtés et les axes restent dans un même rapport. Maintenant donnons, aux systèmes d'axes, une fonction simple pour commencer. On a alors une approximation de la fonction, il reste maintenant à calculer l'aire sous la courbe. Pour cela je construis un polygone qui approxime le plus justement la fonction et qui passe sur l'axe *x*, ainsi j'obtiens une forme fermée dont je peux calculer l'aire. Elle m'est donnée en [cm^2], et heureusement car comme chaque figure a les mêmes unités, l'aire en unités aurait été la même pour tous les côtés. Ainsi je contrôle mes résultats en additionnant l'aire sur les deux petits côtés et en la comparant à l'aire sur l'hypoténuse. Et ça marche. Tout fonctionne. Maintenant certaines fonctions peuvent être négatives et ainsi passer en dessous du côté du triangle, et l'on obtient quelque chose de pas propre, c'est pour cela qu'il vaut mieux se contenter de fonctions positives sur l'intervalle $[0;1]$.

4.2 Construction de la figure avec Cabri

4.2.1 le triangle

Commençons par construire un triangle rectangle, pour cela on commence par créer une droite horizontale *d*, puis l'on construit deux points *A* et *B* sur cette droite. Comme il nous faut un triangle rectangle il nous suffit de construire le cercle de Thalès *c* passant par ces deux points. Pour cela il faut créer le milieu de *[AB]*, *M* et construire le cercle *c* de centre *M* et de rayon *AM*. Plaçons ensuite le point *C* sur le cercle de Thalès. Nous avons désormais nos trois points *A*,*B* et *C*, il faut désormais construire le triangle, avec l'outil <u>polygone,</u> qui passe par ces trois points (cf. fig. 29).

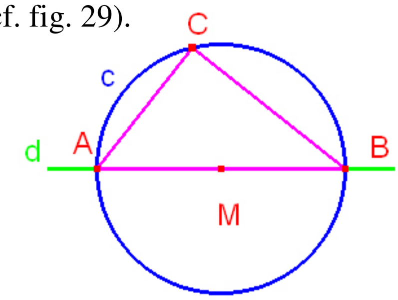


fig. 29

Gardons le strict minimum (cf. fig. 30):

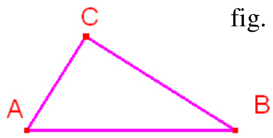


fig. 30

4.2.2 les axes

Sur chaque côté du triangle il nous faut construire des axes afin, ensuite, d'y appliquer une fonction. Construisons l'axe sur le côté *AC* (il en va de même pour les autres côtés du triangle). Il nous faut des axes orthonormés, donc construisons au point *A*, une droite *da* orthogonale au segment *AC*. Construisons le cercle *c'* de centre *A* et de rayon *AC* puis prenons l'intersection du cercle avec la droite *da* ainsi nous avons un point *C'* qui nous permet d'avoir une base orthonormée *B(A;AC;AC')* (cf. fig. 31).

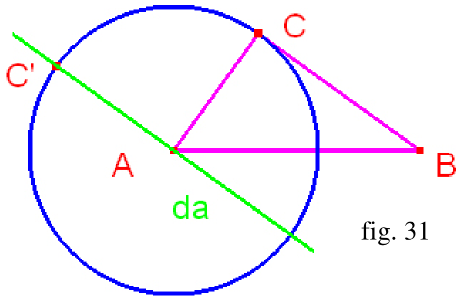


fig. 31

La construction de ma figure se fait sur une base orthonormée, bien qu'elle soit possible dans une base autre qu'orthonormée, mais à ce moment il faut que toutes les bases soient semblables et, pour mon étude, elle complique plus qu'autre chose les constructions sans apporter quelque chose de vraiment pertinent. C'est pour cela que je me restreins à l'étude sur une base orthonormée. Maintenant prenons l'outil <u>nouveaux axes</u>, il faut ensuite cliquer le point *A* puis il faut définir l'axe *x*, donc cliquons le point *C*, puis l'axe *y*, donc cliquons le point *C'* (cf. fig. 32). Ainsi construit, *AC* représente 1 unité dans son système d'axes. Désormais il me faut construire sur les trois autres côtés, de la même façon qu'expliqué précédemment, les 2 autres systèmes d'axes (cf. fig. 33).

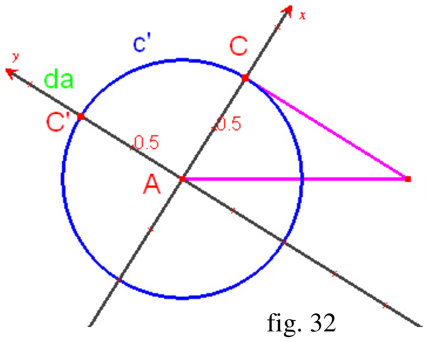


fig. 32

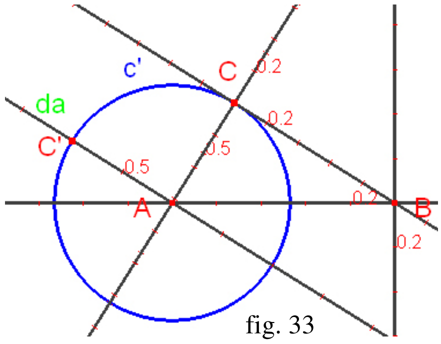


fig. 33

Nous avons donc nos 3 axes orthonormés. Appliquons leur une fonction quelconque (sin(x) p.e.). La fonction ainsi dessinée ne nous apporte pas grand-chose (cf. fig. 34). L'astuce c'est d'isoler une partie de cette courbe. Pour cela il faut redéfinir un point *X* sur le segment [0;1] qui est le côté du triangle, pour que la courbe ne se trace que sur le segment prédéfini. Après avoir défini le point *X* sur le segment il faut en avoir les coordonnées avec l'outil <u>coord. ou équations,</u> nous avons donc la coordonnée en *x*. Il reste à construire la coordonnée *y* afin de reconstruire la fonction, en l'occurrence sin(x). Il suffit d'appliquer l'expression sin(x) à la coordonnée *x* et ainsi avoir la coordonnée *y*. Reportons la valeur de la coordonnée *y* sur l'axe des *y* et nous pouvons construire le point *M* de coordonnée (*x*;*y*). Il reste à demander, grâce à l'outil <u>lieu,</u> le lieu du point *M* lorsque *X* varie. Et de même pour les autres côtés (cf. fig. 35). Gardons ce qui nous intéresse (cf. fig. 36).

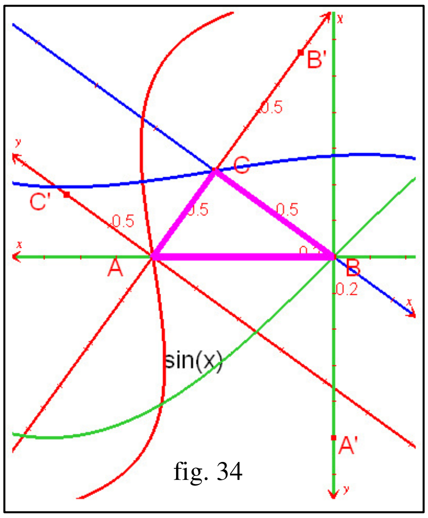


fig. 34

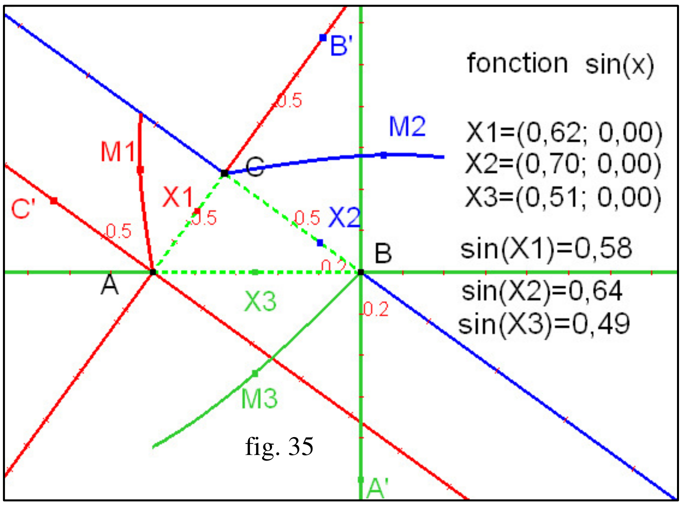


fig. 35

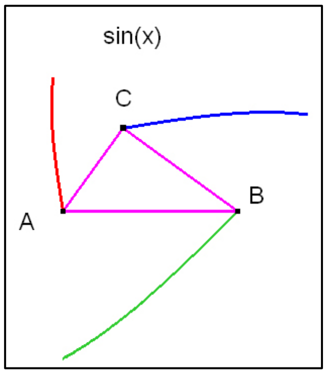


fig. 36

<u>4.2.3 les polygones</u>

Il ne faut pas oublier que l'on parle d'aire sous une fonction. Donc comment calculer cette aire sous la courbe (en employant Cabri bien sûr) ? Comme aucun outil de Cabri nous le permet directement, il me faut, alors, bricoler un peu : l'aire peut m'être donnée par Cabri lorsqu'il existe un polygone fermé, donc il me faut dessiner un polygone qui approxime au mieux l'aire sous la fonction. Je rencontre là, la première imperfection de la figure : on ne peut pas avoir un polygone qui épouse parfaitement la courbe. Cette petite imperfection ne dérange en rien la véracité de ce que je prétends car les polygones sont toujours semblables: si je décide d'en dessiner un avec 5 points sur la courbe, il me faut alors construire, de la même manière, ces 5 points sur les 2 autres courbes. Ainsi j'aurais 3 polygones construit de la même manière, donc semblables. De plus les polygones peuvent épouser la forme de manière presque exacte: en effet, plus je prends de points sur la courbe, plus mon polygone ressemblera à ma courbe. Pour ma figure je me suis limité à 9 points car cela suffit à démontrer (géométriquement) ce que j'affirme. Pour construire ces 9 points je procède de la sorte : je divise, une première fois, un côté du triangle en 2, puis chaque nouvelle moitié en 2, et ainsi de suite jusqu'au nombre de points désirés. Ensuite il faut simplement reporter ces points sur la courbe, grâce à des parallèles aux axes *y*. Désormais il me reste simplement, grâce à l'outil polygone, de relier ses points en passant aussi par les points (0 ; 0) et (1 ; 0). J'obtiens ainsi, sur mes trois côtés du triangle, des polygones semblables, qui approximent assez correctement l'aire sous la courbe de la fonction sin(x) notée $\int_0^1 \sin(x)$ (cf. fig. 37).

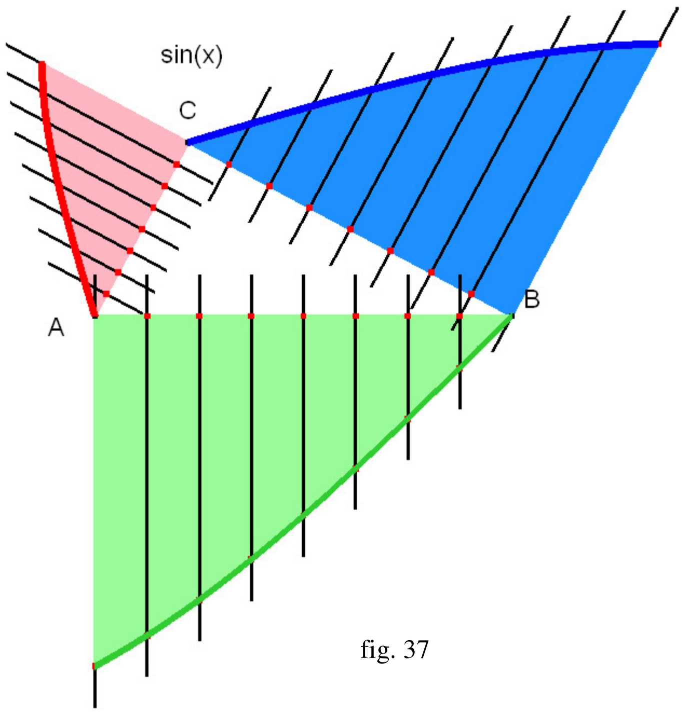


fig. 37

4.2.4 la vérification

Avec l'outil <u>aire</u>, je demande l'aire des 3 polygones. J'additionne l'aire des polygones qui reposent sur les cathètes et je la compare avec celle du polygone posé sur l'hypoténuse et je remarque que ma "démonstration" est correcte (cf. fig. 38).

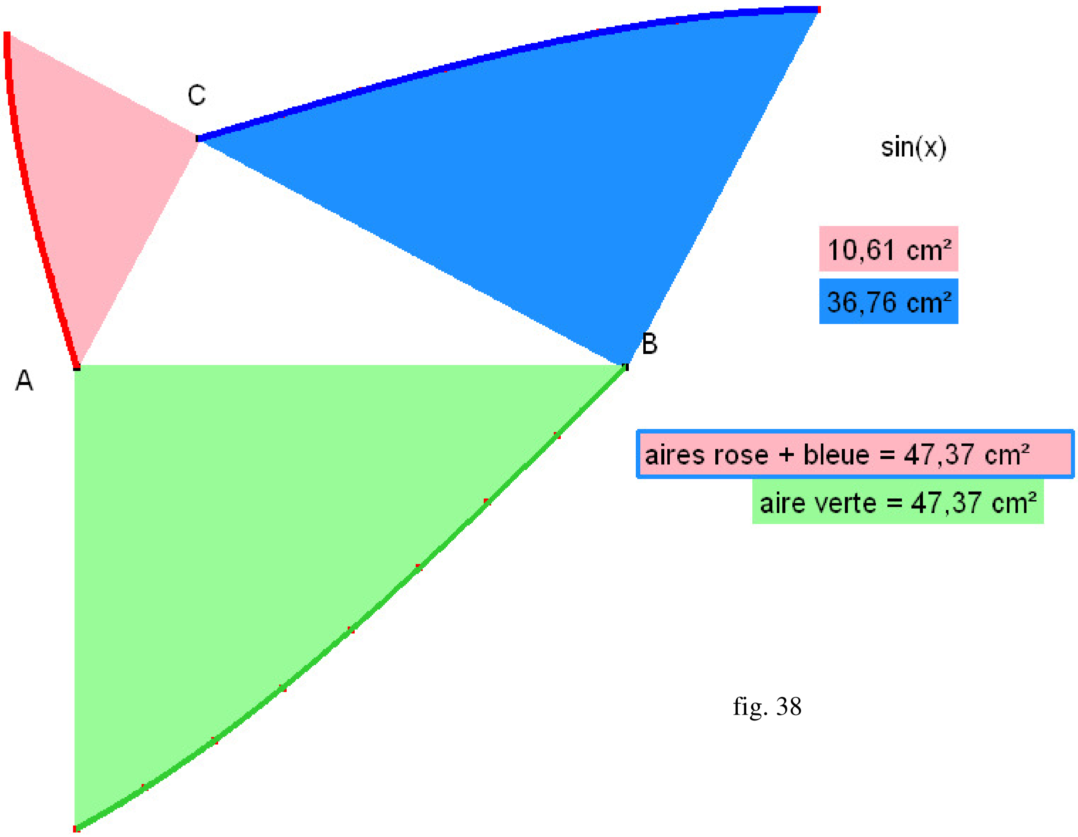


fig. 38

/!\ Certaines fonctions posent des problèmes de visualisation. Les fonctions qui sont négatives sur [0;1] nous empêche de bien saisir la figure, mais il est toutefois possible de le faire et de remarquer que les résultats sont correctes.

Différentes figures sont disponibles : *fction 1pt.fig* , *fction 5pts.fig* et *fction 15pts.fig*.

4.3 Jeux des fonctions

Le théorème de Pythagore est un jeu de fonction: on a 3 longueurs de côtés et on les met au carré, afin d'obtenir cette propriété, celle de Pythagore. Donc c'est en fait une fonction f : de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f(x) \mapsto x^2$. Quelles seraient les propriétés tirées d'autres fonctions, toujours sur le modèle de Pythagore $f(a)+f(b)=f(c)$?

Pour Pythagore, par exemple, on a, avec $\{a,b,c\} \in \mathbb{N}$:

$f(a)+f(b)=f(c) \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2 \Leftrightarrow$ le triangle, représenté par ces 3 cotés *a*,*b* et *c*, est rectangle.

Et si $f(x)=\ln(x)$, nous avons alors pour $\forall\{a,b,c\}>0$:

$$\ln(a)+\ln(b)=\ln(c) \Leftrightarrow \ln(a\cdot b)=\ln(c) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln(a\cdot b)}=\mathrm{e}^{\ln(c)} \Leftrightarrow ab=c$$

On remarque une jolie propriété qui nous dit que si l'on veut satisfaire l'équation $\ln(a)+\ln(b)=\ln(c)$ il faut que $a\cdot b=c$

Maintenant prenons f(x)=x-1 avec $\{a,b,c\} \in \mathbb{R}$:

$$a-1+b-1=c-1 \Leftrightarrow a+b-1=c$$ ici pour satisfaire l'équation il nous faut un *c* qui est égal à la somme de *a* et *b* moins 1.

Et f(x)=1/x $\{a,b,c\} \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{b+a}{ab}=\frac{1}{c} \Leftrightarrow c=\frac{ab}{a+b}$$ qui est la moitié de la moyenne harmonique.

Divers :

$$a^a+b^b=c^c \Leftrightarrow c=\sqrt[c]{a^a+b^b}$$ avec $\{a,b,c\} \subset \mathbb{N}^*-\{1\}$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2} \Leftrightarrow \frac{b^2+a^2}{a^2b^2}=\frac{1}{c^2} \Leftrightarrow c^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \Leftrightarrow c=\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}=ab\sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}}$$

Le but de cette partie est simplement de montrer qu'en s'appuyant sur le modèle du théorème de Pythagore $f(a)+f(b)=f(c)$, il est possible de trouver d'autres propriétés entre les nombres *a*,*b* et *c*, que celle de Pythagore, et qui sont tout à fait intéressantes.

5. Jeux

Cette partie du sujet ne traite plus, à vrai dire, du théorème de Pythagore lui-même, mais elle est indispensable. En effet, il me semble que le mot Pythagore est trop souvent compris comme étant quelque chose de compliqué. Avec Pythagore il est tout à fait possible de faire des choses amusantes. Je vous propose quelques figures et jeux à son sujet.

5.1 Etrange figure

Je trouve une figure très intéressante[7], justement sur les différentes propriétés du théorème de Pythagore. Cette figure est construite sur un modèle pythagoricien. On commence par créer un triangle rectangle avec ses 3 carrés de Pythagore (cf. fig. 39). Suite à cela, il nous faut construire les trois triangles quelconques (oranges) qui ont leur base et l'un de leur côté sur les carrés de Pythagore (cf. fig. 40). Sur le côté "libre" des triangles je construis un nouveau carré et ainsi de suite pour obtenir la figure ci-dessous (cf. fig. 41).

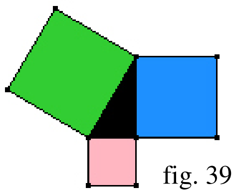


fig. 39

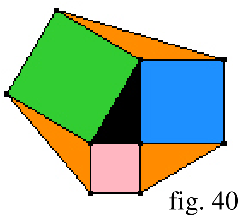


fig. 40

[7] tirée du livre **Pythagore et Thalès** – Les éditions du Kangourou

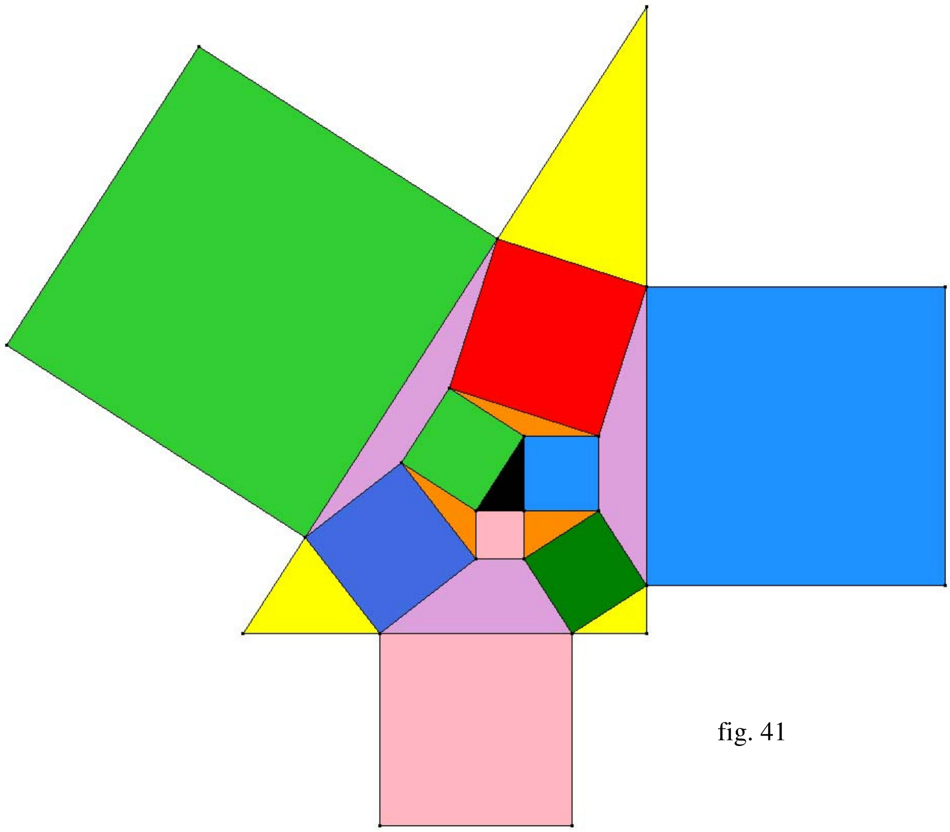


fig. 41

Dans cette figure, 7 propriétés se dégagent:

1. aire du carré rose + aire du carré bleu clair = aire du carré vert.
2. les 3 triangles oranges ont la même aire que le noir.
3. le grand triangle est semblable au triangle noir.
4. les grandes bases des trapèzes violets valent 4 fois leur petite base.
5. les trapèzes violets mesurent tous 5 fois le triangle noir.
6. l'aire du carré rouge + l'aire du carré bleu foncé = 5 fois l'aire du carré vert foncé.
7. l'aire du carré rose extérieur + aire du carré bleu extérieur = aire carré vert extérieur.

Toutes ces propriétés ne sont pas liées à Pythagore directement, car la figure n'est pas construite entièrement avec des triangles rectangles, mais la base est quand même un triangle rectangle et ses carrés. La propriété 1 est l'application du théorème de Pythagore. La propriété 2 est facile à montrer, en effet, tous les triangles oranges ont la même base et la même auteur que le triangle noir, il suffit de procéder à une simple translation des sommets des triangles (cf. propriété d'Euclide 2.1.1). La propriété 3, elle, est facile à voir sous Cabri grâce au rapport des longueurs, mais comment la démontrer? Il en va de même pour les autres propriétés, Cabri nous donne la réponse, mais il reste à trouver la démonstration (cf. *etrange figure.fig*).

5.2 Les fractales

Il est possible de réaliser des fractales sur le triangle de Pythagore. Il faut savoir qu'une fractale est une suite d'éléments similaires aux premiers. Je vais vous en montrer des exemples (cf. fig. 42):

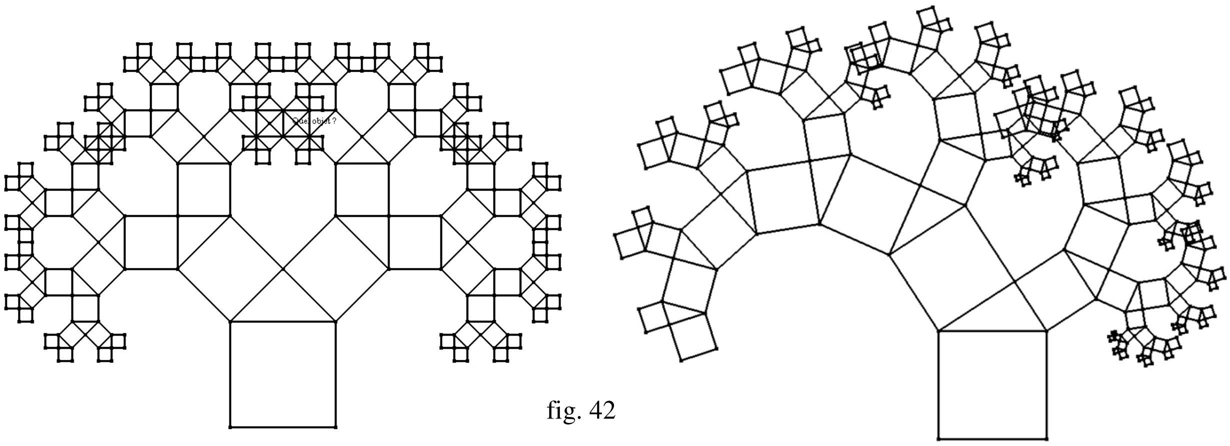


fig. 42

Bien sûr cela n'est pas propre à Pythagore, les fractales sont observées partout, même dans la nature. Celles de Pythagore sont visuellement très bonnes. Pour y jouer : *pytha fractale.fig*.

5.3 Puzzle

Il existe un programme (*Classic Pythagorean Puzzles*) qui génère des puzzles où le but est simple: il faut, à partir d'un carré, reconstituer la figure proposée. Par exemple (cf. fig. 43[8]) :

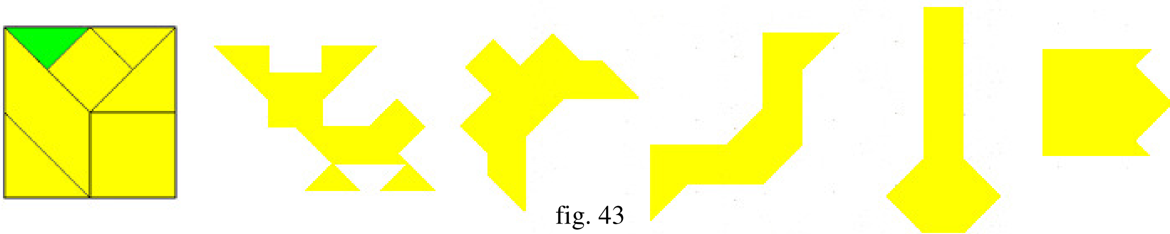


fig. 43

De nombreux autres puzzles sont à réaliser. Le jeu parait simple, mais il peut vite devenir difficile.

Voilà ce qui est possible de faire avec Pythagore quand on joue avec lui. Certains de ses aspects sont, il est vrai, difficiles à cerner, mais d'autres nous permettent de passer de bons moments de réflexion logique.

---

[8] images prises à partir du programme *Classic Pythagorean Puzzles*

6. Conclusion

6.1 Que nous amène cette extrapolation (cf. 4.)?

Pythagore m'a fait découvrir cette nouvelle thèse à son propos, mais que nous amène-t-elle vraiment ? Fondamentalement, pas grand chose car les problèmes de géométrie ne sont jamais étudiés autour d'un triangle rectangle avec, en plus, des polygones épousant une fonction donnée, mais peut-être qu'une fois, des problèmes de la sorte seront demandés aux élèves. A l'époque de sa découverte, personne n'aurait imaginé que le théorème de Pythagore serait de nos jours, un des théorèmes le plus employé et le plus connu: on l'emploie dans tous les secteurs: dès qu'il faut connaître une distance, une déviation, un angle, ... on fait appel à Pythagore. Cette nouvelle thèse est juste une application de Pythagore dans un "domaine" différent, un "domaine" qui n'est que peu étudié.

6.2 Est-ce que le théorème de Pythagore nous réserve d'autres surprises ?

Etant donné qu'il m'en a déjà fait découvrir pas mal et que je ne pense pas être le dernier à avoir eu cette chance, je pense qu'il cache encore d'énormes mystères, qu'il ne reste plus qu'à découvrir. Pour ma part, il m'a déjà énormément surpris: comment, au début de mon travail de maturité, aurais-je pu penser découvrir tout cela ? Durant tous les siècles on ne cessa de découvrir des choses nouvelles sur Pythagore : d'autres moyens de démontrer son théorème, d'autres manières d'y parvenir, des extrapolations, etc., je pense que cela va continuer.

7. Bilan personnel

7.1 Esprit de recherche

Au début de mon travail, j'avais l'idée claire en tête du sujet que je devais traiter, je connaissais Pythagore de par mes cours de mathématiques, de plus, j'aimais bien les mathématiques, donc ce sujet m'allait à merveille. Mais rapidement je me suis dis : "mais qu'est-ce que je vais bien pouvoir dire là-dessus ?". Mais de fil en aiguille, je découvre ceci, cela, Monsieur Frachebourg m'a donné une piste en m'expliquant qu'il était possible d'employer une fonction autre que le carré et que la propriété de Pythagore était toujours respectée. De plus personne n'a vraiment étudié ce cas, alors je décide de prendre cette

nouvelle thèse pour développer mon sujet. Mon travail sera alors de trouver comment expliciter cette thèse, comment la construire grâce à Cabri et en donner une preuve.
Après quelques jours acharnés à essayer de trouver "le truc", je parvins enfin à trouver ce qu'il me faut. Je m'y lance et, après quelques heures, je réussis à montrer ce que j'affirmais. C'est là mon premier succès dans ce travail de maturité. C'est là que je me suis rendu compte que lorsque l'on veut quelque chose, on peut le trouver, à condition de le chercher.

7.2 Esprit de découverte

Comment l'expliquer ? Dès qu'on se lance dans le travail de maturité, on est intéressé par une seule chose: trouver quelque chose à dire de pertinent. Je pense avoir trouvé ce qu'il me fallait. Mais le travail ne s'arrête pas là, il fallait que je sache quoi mettre autour de ma thèse principale. De nouveau, il me fallait parler de quelque chose qui ne fut pas déjà étudié et, en cherchant un peu, je découvre que Pythagore peut-être employé en 3 dimensions. J'avais dès lors trouvé le gros de mon travail. Il me fallait l'approfondir et c'est à ce moment que je me suis vraiment rendu compte de ce que je venais de découvrir.
Ensuite, il m'a fallut introduire le sujet de Pythagore, et là j'ai rencontré beaucoup de problèmes car, comme je l'ai déjà dit plus haut (cf. 1.3), il est difficile de trouver des informations sûres, certifiées à son propos. A part ce détail, on découvre avec intérêt la vie de Pythagore, ce qu'il a fait, d'où il a tiré l'idée de son théorème, etc.
Je suis assez satisfait sur l'ensemble de mes découvertes et je pense avoir trouvé des choses qu'il ne me serait jamais venu, autrement, à l'esprit. Ce travail m'a permis de faire des découvertes enrichissantes.

Bibliographie

□ Je me suis aidé principalement d'internet pour faire le point 1.L'introduction :

http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Pythagore
http://www.math93.com/pythagore.htm
http://agora.qc.ca/mot.nsf/Dossiers/Pythagore
http://www.infoscience.fr/histoire/biograph/biograph.php3?Ref=54
http://www.ac-nancy-metz.fr/pres-etab/avrils/product/biografi.htm
http://www-cabri.imag.fr/TeleCabri/PassionRecherche/Histoire/Pythagore/Pythagore.htm
http://perso.wanadoo.fr/spqr/pythagore.htm
http://villemin.gerard.free.fr/Esprit/Pythagor.htm
http://www.proverbes-citations.com/pythagore.htm

□ Pour les autres points du travail je me suis servi d'un livre :

Pythagore & Thalès
collection MATH POUR TOUS
2e édition revue et augmentée – Tome 3
ACL – Les éditions du Kangourou A.Deledicq

□ Pour le point 2.3 Puzzle

http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/pages/truc_mat/pythagor/textes/pyth-puzzle-autre.htm
http://www.ac-creteil.fr/Colleges/93/jmoulinmontreuil/mathematiques/quatrieme/activites/pythagore/pythagore3.htm
http://www.ac-creteil.fr/Colleges/93/jmoulinmontreuil/mathematiques/quatrieme/activites/pythagore/pythagore5.htm
http://www.ac-creteil.fr/Colleges/93/jmoulinmontreuil/mathematiques/quatrieme/activites/pythagore/pythagore7.html

□ Pour le point 2.4.3 Le nombre d'or

Figure de monsieur P. Frachebourg : *construction-or-demonstr.fig*

□ Image page de titre

http://perso.orange.fr/debart/geoplan/pythagore/thm_mariee.jpg avec retouche