Les spirales, quel drôle de sujet pour un travail de maturité !! On m’a souvent dit : « tu ne fais quand même pas ton travail de maturité sur un simple trait qui tourne comme ça ? ». Non en effet, les spirales ce n’est de loin pas que ça, c’est même un sujet d’une étendue presque infinie, d’ailleurs je vais tenter une nouvelle fois dans cette présentation oral d’élargir vos connaissance dans ce sujet fort intéressant. Ce thème est très captivant principalement du fait que l’on fait des maths, mais des maths qui bougent, loin des long calculs fastidieux ! Quel bonheur de travailler sur un logiciel comme cabri qui permet de modéliser des situations mathématique de manière dynamique.

Plan :

•Introduction
•Les « fausses » spirales
•Les « vraies » spirales
–Les spirales archimédiennes
–Les autres spirales
•Une seule figure pour toutes les spirales?
•Conclusion

Introduction :

Dans cette introduction, nous allons revenir sur les définitions mêmes des spirales. Elles sont principalement au nombre de 3 :
•courbe plane décrivant des révolutions autour d’un point fixe en s’en éloignant
=> correspond à l’idée qu’un tout à chacun se fait d’une spirale
•courbe non fermée, composée d’une suite d’arcs de cercle raccordés
=> correspond aux « fausses spirales », aux spirales « approchées »
•Une spirale plane est une courbe ayant une équation polaire avec f monotone sur un intervalle non borné. Les spirales sont forcément des courbes transcendantes
=> correspond à la majorité des spirales présentées dans ce travail, puisque toutes les spirales « exactes » ont été obtenues à partir de leur équation polaire

Les fausses spirales :

Ces spirales qui correspondent à la deuxième définition, sont donc uniquement constituées d’arcs de cercles raccordés. Dans le travail écrit, j’avais choisit de présenté d’abord les spirales d’or, puis les spirales à n centres, pour bien montrer le lien entre les spirales à n centres et la spirale de la chèvre puis la spirale d’Archimède. Ici j’ai fait l’inverse
•Les spirales à n centres
- la spirale à 2 centres
- la spirale à 6 centres

•Les spirales d’or
- la spirale du rectangle d’or
- la spirale du triangle d’or

Regardons maintenant quelle spirale exacte correspond à la spirale du rectangle d’or…

Les vraies spirales :

Il s’agit de la spirale logarithmique, comme le montre cette figure :…
Nous pouvons constater que la spirale correspond très bien pour les petits arcs, mais que plus les arcs sont grands et plus l’imperfection est visible. Nous pouvons également constater que les deux spirales correspondent exactement aux points de départ des différents arcs de cercles…
Quant aux spirales à n centres, je ne vais pas revenir sur leur spirale exacte correspondante, puisque j’ai beaucoup insisté sur cette notion, en montrant les deux passages à la limite, qui permettait en augmentant le nombre de côté d’obtenir un cercle, et par conséquent la spirale de la chèvre, puis en réduisant un maximum le rayon, la spirale d’Archimède.
Venons-en donc maintenant aux spirales exactes, qui sont séparées en deux principaux groupes : les spirales archimédiennes, et les autres !

Les spirales archimédiennes :

Parmi les spirales archimédiennes, il convient d'analyser deux caractéristiques pour pouvoir effectuer un classement.
Tout d'abord, soit elles sont divergentes, comme l'image habituelle qu'on se fait des spirales. C'est à dire qu'elle s'éloigne du centre. Ou alors, elles sont convergentes, elles semblent arrivé depuis l'infini et de converger vers le centre.
Pour le cas où elles sont divergentes il faut regarder l'écart entre les spires, soit constant, soit croissant, soit décroissant. On ne va pas revenir en détail là-dessus…
Pour les 2 spirales convergentes, leur différence réside dans un point d'inflexion que possède la spirale de lituus, au contraire de la spirale hyperbolique.

Les autres spirales :

Les autres spirales sont des spirales un peu « inclassable ». elle sont très originales. C'est d'ailleurs pour cela qu'elle sont intéressantes ! les spirales de Galilée et parabolique font des boucles avant de se développer plus ou moins normalement. Les spirales sinusoïdales sont vraiment plus rien à voir !! Pourquoi est-ce qu'on les appelle spirale, alors ? Elles ne répondent même pas aux critères de la troisième définition, puisque le cosinus n'est pas monotone ! La question reste ouverte..

Une figure pour toutes les spirales?

Voyant que l'on peut trouver de nombreux liens entres les spirales, je me suis dit que le plus simple pour le montrer, était de regrouper toutes les spirales sur une même figure. Mon but était alors de trouver une formule, avec un minimum de coefficient, qui me permettrai de retrouver toutes les spirales.
Pour obtenir la formule, j'ai du tout d'abord séparer les cas : selon que l'on multiplie θ, que l'on divise par θ ou s'il y a un sinus. J'ai donc tout d'abord placé trois « interrupteurs » x, y et z.
Ensuite, j'ai placé différents coefficients. Il m'a fallu plusieurs essais avant d'arriver à ce résultat.
Je peux maintenant retrouver toutes les spirales. Toutes ? non, presque toute. En effet la spirale parabolique est dure à obtenir à cause du plus ou moins qu'il comporte dans sa formule. Les spirales sinusoïdales ne fonctionne pas non plus toutes, mais le problème était déjà la sur les autres figures, à causes de Cabri qui ne calcule par certaines racines..
Quelques exemples.
Et si on allumait plusieurs interrupteurs en même temps ??

Avant de commencer, ouvrir Cabri en radian !!

Introduction

Les spirales, quel drôle de sujet pour un travail de maturité !! On m'a souvent dit : « tu ne fais quand même pas ton travail de maturité sur un simple trait qui tourne comme ça ? ». Non en effet, les spirales ce n'est de loin pas que ça, c'est même un sujet d'une étendue presque infinie, d'ailleurs je vais tenter une nouvelle fois dans cette présentation oral d'élargir vos connaissance dans ce sujet fort intéressant. Ce thème est très captivant principalement du fait que l'on fait des maths, mais des maths qui bougent, loin des long calculs fastidieux ! Quel bonheur de travailler sur un logiciel comme cabri qui permet de modéliser des situations mathématique de manière dynamique.

Équation spirale archimédiennes : $\rho^m = a^m \theta^n$

Figures à montrer :

- spirale à 2 centres
- spirale du triangle d'or
- spirale logarithmique sur la spirale d'or
- spirale d'Archimède => animation donne l'impression de profondeur (c.f. vis sans fin)
- spirale de Fermat
- spirale de lituus
- spirale parabolique
- spirale de Galilée
- spirale sinusoïdale
- spirale récapitulative

Tableau des coefficients à donner aux paramètres pour obtenir les différentes spirales

	a	**b**	**c**	**d**	**k**	**n**	**v**	**x**	**y**	**z**	**2^e b.**	**Remarques**
Archimède	1	0	~	1	~	1	1	1	0	0	Non	-
Hyperbolique	1	0	~	0	~	1	-1	1	0	0	Oui	c de même signe que k
Logarithmique	~ $_{>1}$	/	/	/	~	1	/	0	0	1	Non	-
Fermat	1	0	1	2	~	2	1	1	0	0	Oui	On peut intervertir les rôles de c et k
Lituus	1	0	1	1	~	1	-1/2	1	0	0	Oui	
Galilée	~	1	1	1	~ $_{<0}$	1	2	1	0	0	Non	-
Parabolique	~	0	~ *paire*	1/2	~	1	½	1	0	0	Non	Problème à cause du ±
Sinusoïdale	~	~ $_{\neq 0}$	/	/	/	~	/	0	1	0	Non	Peine avec les calculs. Ne marche pas tjrs.

~ : varie

/ : ne change rien

Exemples pour figures finale :

1) tout 1 sauf n = 2 et c = 0,2
2) et si on fait « plus qu'allumer les interrupteurs » ? à partir de 1), augmenter z
3) n = 2 ; x = 0,5 ; y = 6 ; z = 17 ; c = 0,2
4) à partir de 3), augmenter v puis le diminuer
5) idem (revenir à 3)) puis augmenter n