L'inversion - point de vue géométrique

I. Définition - Premières propriétés

Définition : l'inversion de centre O et de puissance k, est l'application $I_{O,\,k}$ du plan privé du point O qui a tout point M associe le point M' de (OM) tel que $\overline{OM}.\,\overline{OM'} = k$

Pour simplifier les écritures, dans la suite les lettres primées sont les images des lettres non primées par une inversion $I_{O,\,k}$.

Remarques :

1) L'inversion est en fait une transformation projective : l'image de O serait alors le point à l'infini.

2) Toute droite passant par le centre est globalement invariante.

Si k > 0 , une définition équivalente est la donnée d'un cercle. En effet, si k >0, alors le cercle **C**(0, √k) est invariant point par point. On définira donc parfois une inversion de centre O et de rapport positif $k = R^2$ par le cercle **C**(O, R), son cercle d'invariants.

Conséquences de la définition

La notion de puissance d'un point par rapport à un cercle permet de remarquer les propriétés suivantes (trés utiles en pratique) :

3) Tout cercles passant par deux points A et A' est globalement invariant par l'inversion qui transforme A en A'.

4) Soit $I_{O,\,k}$, A et B tels que O, A, B ne soient pas alignés. Alors A, B, A', et B' sont cocycliques ... ce qui explique la définition de l'inversion par un cercle d'invariants.

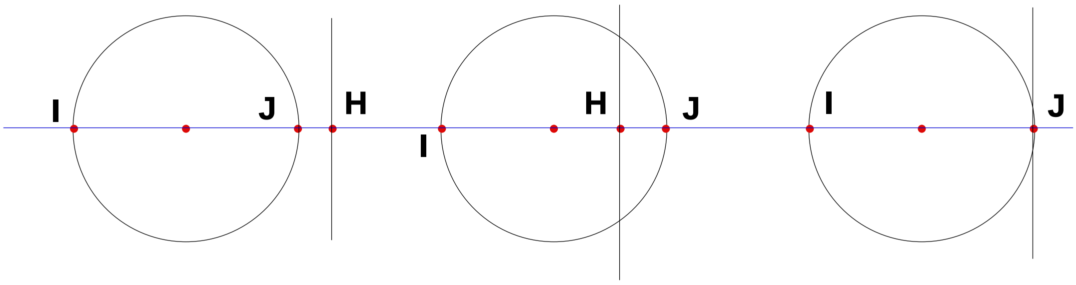
5) Un cercle Γ est (globalement) invariant par une inversion $I_{O,\,k}$ *ssi* la puissance P de O par rapport à Γ est égale à k.

II. Images par inversion

L'image d'une droite ne passant pas par le centre est un cercle passant par ce centre.

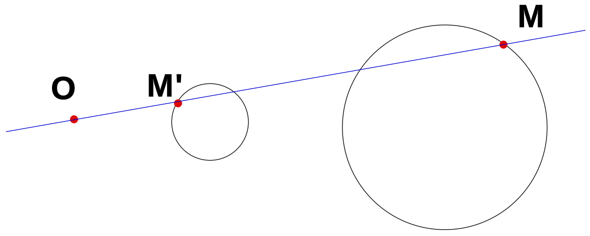
L'image d'un cercle passant par le centre est une droite, perpendiculaire au diamètre issu de ce centre.

Un cercle et une droite se correspondent en général dans deux inversions, dans une seule si la droite est tangente :



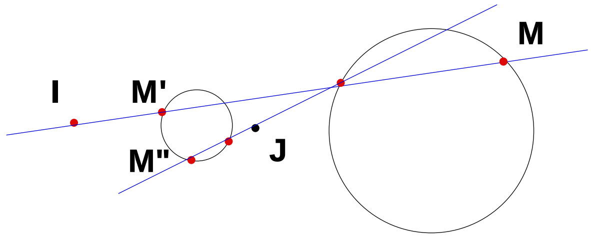
Inv(I, $\overline{IJ}.\,\overline{IH}$) et Inv(J, $\overline{JI}.\,\overline{JH}$) conviennent   Ici seulement Inv(I, $\overline{IJ}.\,\overline{IH}$)

L'image d'un cercle ne passant pas par le centre est un cercle. Le centre d'inversion est alors un des deux centres d'homothétie des deux cercles.
Plus techniquement $I_{O,\,k}$(**C**) = **C**' ou **C**' est l'homothétique de **C** dans l'homothétie de centre O et de rapport k/P si P désigne la puissance de O par rapport à **C**.



Deux cercles non tangents donnés se correspondent dans deux inversions , et dans une seule si ils sont tangents. Les centres d'inversion sont les centres d'homothétie.

On remarquera que l'inverse d'un point est l'autre point que l'homothétique ....

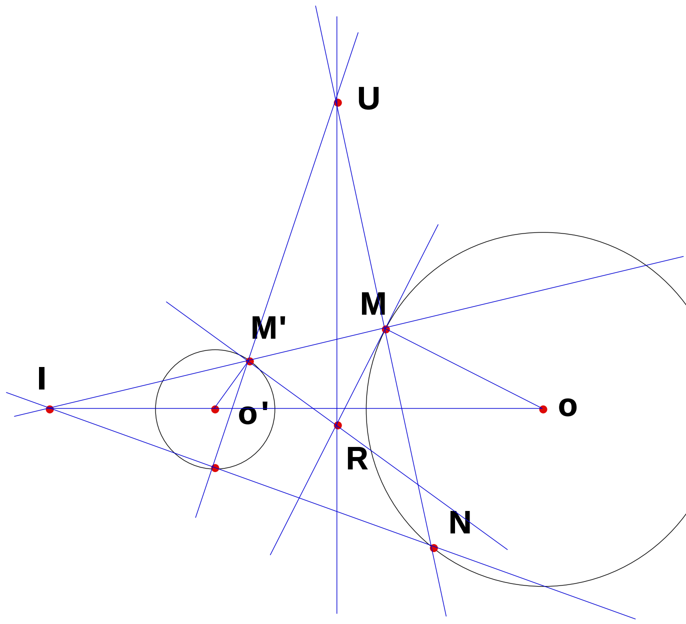


III. Premières applications

Pour que deux points soient inverses sur deux cercles donnés, il faut et il suffit que les tangentes en ces points se coupent sur l'axe radical des deux cercles.

Ici M' est l'image de M dans une inversion de centre I, alors R est sur l'axe radical.

Conséquence : une droite (MN) - points de **C** - et son image (M'N') dans une inversion échangeant les cercles **C** et **C**' se coupent sur l'axe radical.



Lorsqu'un cercle Γ est tangent à deux cercles **C** et **C**' donnés, les points de contact sont inverses sur ces deux cercles, et Γ est donc un cercle invariant dans l'inversion associée.