

# Une règle, un compas, sinon rien...

E. HAKENHOLZ

Lorsqu'on choisit l'article *cercle défini par centre et point*, on pense évidemment au compas. De même, on imagine très clairement la règle lorsqu'on sélectionne *droite définie par deux points*. Mais lorsqu'un élève se sert, pour sa figure, de *médiatrice*, *droite parallèle*, *bissectrice* ou autre, il peut lui arriver d'oublier - et on lui pardonne ! - qu'il est en train de faire une réelle construction règle et compas. Tous ces articles sont bien sûr tout à fait reconstituables à partir d'un compas -*cercle défini par centre et point*- et d'une règle -*droite définie par deux points*-. On peut proposer cette activité de reconstruction à des élèves de 4° ou de 3°. Les pré-requis sont les suivants :

- *Médiatrice de [AB]*: points équidistants de A et B et droite perpendiculaire passant par le milieu.
- *Symétrie centrale et Symétrie orthogonale* : définition et constructions d'images.
- *Parallélogramme* : définition et propriété des diagonales.
- *Bissectrice* : Définition et construction.

## Des menus, faisons table rase...

Je vous propose donc de mettre vos élèves devant un logiciel dépouillé et méconnaissable. En choisissant l'article *Editer les menus* vous allez pouvoir procéder à un grand lessivage. Sabrez donc allègrement dans les menus Création, Construction et Divers pour ne laisser que l'essentiel :

- Vous épargnez les articles *Point de base*, *Droite passant par deux points* et *Cercle défini par centre et point* dans le menu Création.
- Dans votre infinie bonté, vous graciez *Intersection de deux objets* et *Point sur objet* du menu Construction.
- Dans le menu Divers, les seuls rescapés du massacre seront *Supprimer un objet* et l'intouchable *Macro-construction*.

Vous pourrez ensuite sauver cette nouvelle barre de menu sous le nom "MENU\_NU".

Avant toute chose, notons que l'article *Symétrique d'un point* est un cas isolé dans Cabri, car il effectue aussi bien les symétries que les réflexions. Ceci est traité de manière interne par le logiciel, et on ne peut faire autrement que de créer deux macros différentes, une pour chacune de ces transformations.

Notons aussi que les objets initiaux des macros

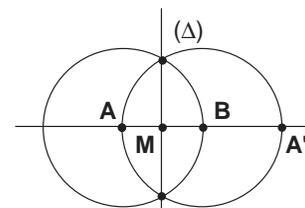
ne peuvent être ici que des points. Par exemple, pour la droite passant par F et parallèle à (AB), il faut désigner comme objets initiaux les trois points F, A et B.

J'ai proposé cette activité en club à huit élèves de troisième, qui avaient déjà une bonne habitude du logiciel. Face à ces menus très limités, leur première réaction de surprise passée, je leur ai présenté le but de la séance comme étant de reconstruire les menus standards. Le petit futé de service m'a tout de suite fait remarquer qu'il suffisait de quitter le logiciel et de le relancer... Ne prenant même pas la peine de répondre à cette infamie, j'ai commencé par dresser la liste, dans le désordre, des articles manquants du menu *construction*. La question de l'ordre de reconstruction des menus a provoqué de leur part une réaction spontanée et unanime : les articles *milieu*, *symétrique point* et *médiatrice* sont les plus "simples".

## Milieu, Symétrique point et Médiatrice

On peut créer ces trois macros à partir d'une même figure. Je leur ai donc proposé une première étape sur Cabri à peu près dans ces termes :

*A partir de deux points A et B, construire une unique figure sur laquelle apparaîtra la médiatrice ( $\Delta$ ) du segment [AB], son milieu M et A', symétrique de A par rapport à B.*



Après cela, je leur demandais de créer les trois macros avec comme objets initiaux A et B dans chaque cas.

Nous rencontrons, avec la macro *Milieu*, une petite différence avec la primitive Cabri du même nom. Pour le logiciel, tout est analytique, et *Milieu* est traité comme tel. Même si cela n'apparaît jamais directement, lorsqu'on sélectionne *milieu* dans les menus standards, Cabri ne fait que créer le point de coordonnées:

$$\frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad \frac{y_A + y_B}{2}$$

Lorsque A et B sont confondus, cela ne pose

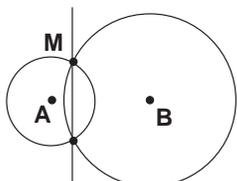
(1) Les problèmes de calcul peuvent être de natures différentes : division par zéro, racine d'un négatif, etc...

aucun problème pour le calcul des coordonnées <sup>(1)</sup> et en conséquence, Cabri va créer le milieu si on le lui demande. Notre macro, quant à elle, ne peut rien créer dans cette situation car, par exemple, la droite (AB) ne peut pas exister lorsque A est sur B. Pour les mêmes raisons, le symétrique de A par rapport à B, lorsque A et B sont confondus, n'est pas créé par notre macro, alors qu'il l'est par la primitive *Symétrie d'un point*.

Lors de la séance Cabri, je n'ai pas fait ces remarques et je me suis contenté de leur dire, après création des trois macros, de passer à la suite, sans plus d'indications. Livrés complètement à eux-mêmes, les élèves ont tous voulu poursuivre en créant tout de suite la macro *Droite perpendiculaire*.

**Des perpendiculaires à dessin...**

*On crée la droite passant par les intersections du cercle de centre A passant par M avec le cercle de centre B passant par M.*



Sur le papier, cette construction est sans doute la première à laquelle on pense, que l'on soit élève ou prof de maths.

Cependant, cette macro *droite perpendiculaire* proposée par trois binômes, n'était pas opérante pour une infinité de positions de M. En effet, lorsque M est sur la droite (AB), les deux cercles sont tangents et la droite disparaît. Ceci est une bonne occasion de rappeler que sur Cabri, on raisonne en terme de figure géométrique et non de dessin. Il faut donc constamment veiller à ce que notre construction soit vraie dans tout les cas.

Les élèves font souvent une confusion entre l'objet théorique géométrique qu'est la figure et une représentation matérielle de cet objet comme le dessin. Cabri, contrairement au papier, est un outil magistral pour lever cette ambiguïté. Avec un peu d'habitude, les élèves d'eux-mêmes déplacent leurs objets, quand le moment est venu de tester la figure...

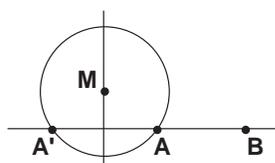
Les trois binômes avaient pourtant pris soin de déplacer A, B et M, afin de balayer le plus de cas possibles, et tout leur paraissait correct. Ils avaient tout simplement oublié de placer M sur (AB) lorsque cette droite est horizontale, verticale, ou à 45°. Notons que lorsque (AB) n'est pas dans une de ces quatre positions, il y a peu de chance pour que Cabri considère que M est sur la droite, même si cela semble être le cas à l'écran.

J'ai pu leur faire remarquer la disparition de la perpendiculaire en mettant (AB) en position horizontale et M sur cette droite. J'avoue ne pas avoir eu la présence d'esprit de faire beaucoup mieux. J'aurais pu leur proposer d'appliquer leur macro à un point sur objet de la droite (AB). Dans ces conditions, les trois points sont numériquement alignés pour Cabri, et par conséquent le logiciel refuse de créer la perpendiculaire...

D'autres versions de cette macro peuvent venir à l'esprit à ce stade de la reconstruction des menus.

Prenons celle-ci par exemple :

*Appelons A' l'intersection de la droite (AB) et du cercle de centre M passant par A. La médiatrice du segment [A'A] semble être alors la droite cherchée.*

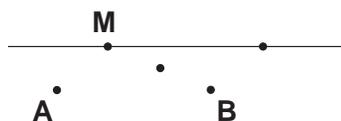


Seulement voilà, lorsque (MA) et (AB) forment un angle droit, les points A et A' sont confondus et bien sûr, finie la médiatrice !

**macro Droite parallèle**

Après cet échec très instructif, les élèves se sont mis à réfléchir à l'article *Droite parallèle*. Je vous livre la construction effectuée par un binôme, qui a été reprise par les autres, peut-être à la suite de quelques coups d'oeil furtifs <sup>(2)</sup>...

*En utilisant deux des trois premières macros, on crée I, milieu de [MB], puis le symétrique de A par rapport à I.*



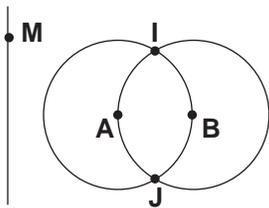
Les élèves avaient rencontré très récemment cette construction du parallélogramme, la meilleure qui soit sur Cabri. Il ne leur restait plus qu'à transformer cette figure en macro avec comme objets initiaux les points M, A et B.

**macro Droite Perpendiculaire**

La perpendiculaire à (AB) passant par M est parallèle à la médiatrice du segment [AB] <sup>(3)</sup>. L'habitude de Cabri a poussé les élèves à créer la médiatrice ( $\Delta$ ) du segment [AB] par application de la macro *médiatrice*. Malheureusement, dans ce cas, on ne peut pas appliquer *Droite parallèle* au point M et à la droite ( $\Delta$ ), étant donné que cette macro, comme les autres, n'accepte en objets initiaux que des points... ( suite page 19 )

<sup>(2)</sup> Je ne vais tout de même pas interdire les coups d'oeil furtifs en club, n'est ce pas ?

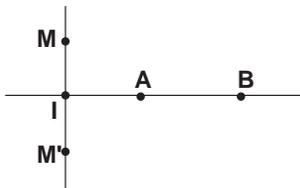
<sup>(3)</sup> Je leur ai donné cette indication. Je n'aurais pas dû ?



Les élèves sont restés un moment bloqués par cette petite difficulté. Il a fallu que je leur dise de construire les deux cercles ci-dessus afin de faire apparaître leurs intersections I et J. A partir de là ils ont appliqué la macro *Droite parallèle* à M, I et J.

**macro Symétrique droite**

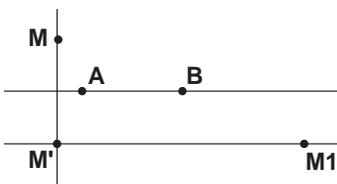
On mène la droite passant par M et perpendiculaire à la droite (AB). La symétrique de M par rapport à l'intersection de ces deux droites est M', le point cherché...



Après cette construction, effectuée par deux groupes, j'ai pu leur faire remarquer que M' disparaissait lorsque M était sur la droite (AB), contrairement à ce qui se passe pour l'article des menus standards. En effet, le symétrique de M par rapport à I n'est pas créé lorsque M est sur I.

Considérons maintenant cette autre construction :

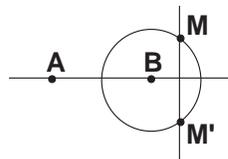
Appelons M1 le symétrique de M par rapport à B. Menons la perpendiculaire à (AB) passant par M et la parallèle à (AB) passant par M1. Ces deux droites se coupent en M', le point cherché.



Dans ce cas, M' existe toujours, sauf bien sûr lorsque M est sur B.

J'étais donc sur le point de leur proposer cette autre figure, qui élimine le problème de la disparition de M', quand un troisième binôme m'appelle : "M'sieur, on a trouvé !". Et sous mes yeux ébahis, ils me proposent la construction suivante :

On crée la perpendiculaire à (AB) passant par M. Le cercle de centre B passant par M coupe cette droite en M', et puis c'est tout...

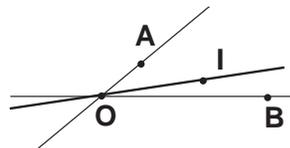


Me précipitant sur la souris, la main tremblante, j'ai tout de suite testé le cas critique et bien sûr, la figure était bonne. Lorsque M est sur (AB), la perpendiculaire est tangente au cercle, et Cabri, raisonnant analytiquement en termes de racine double, crée sur M le deuxième point d'intersection M'.

Eh non, je n'y avais pas pensé ! Eh oui, je suis prof de maths ! et alors ? on peut avoir ses petits moments de faiblesse tout de même ! Fabrice et Yanis ont donc été chaudement félicités pour cette belle construction.

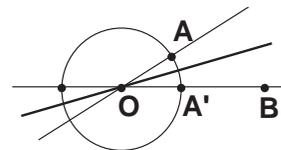
**macro Bissectrice**

Pour construire la bissectrice d'un angle AOB, deux binômes me proposaient de prendre le milieu I de [AB] et de créer la droite (OI). Avec Cabri, il est très simple de répondre à une telle ignominie. Il suffit de placer la figure de manière à ce que la distance OB soit "très supérieure" à OA et de poser la question à mille francs :



Et vous croyez vraiment que (OI) partage l'angle en deux parties égales ?

Deux autres groupes ont construit convenablement la bissectrice. Le cercle de centre O passant par A coupe [OB] en A'. Un binôme utilisait alors la macro *médiatrice* tandis que l'autre optait pour *milieu*.



**En conclusion**

Il a fallu deux séances d'une heure pour venir à bout du contrat que l'on s'était fixé. Cela peut paraître long, mais nous étions en club. Dans ce cadre là, on peut se permettre ce que l'on s'interdit un peu pendant les heures de cours. On peut donner du temps aux élèves, attendre leurs réactions, leurs réflexions, et les laisser un peu plus livrés à eux-mêmes.

Pour eux, les six articles étudiés prennent, après cette activité, le statut de macro. Les vraies primitives géométriques de construction de Cabri ne sont finalement plus que deux : *Droite définie par deux points* (la règle) et *cercle défini par centre et point* (le compas). □

En fait il existe une solution élémentaire au compas seul. Les cercles de centres A et B passant par M se recoupent en M'.