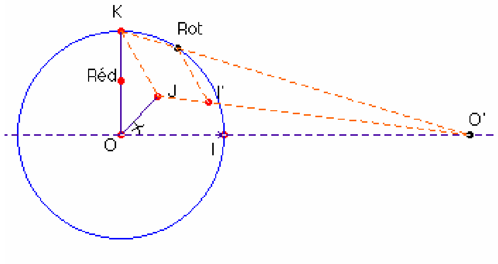
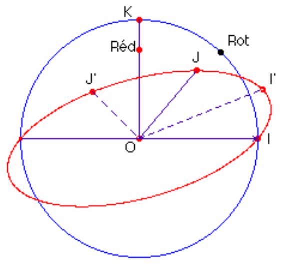
Cours n° 8 - Rotation dans l’espace – l’affinité

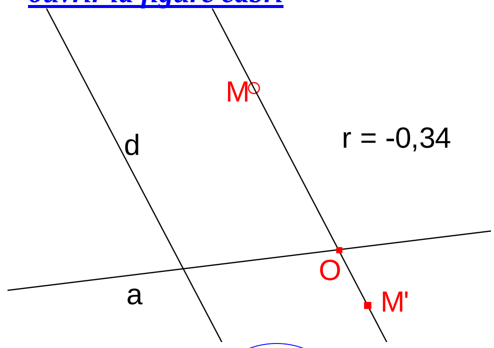
Dans le cours présentant la construction du curseur-rotation en PC, on a justifié la construction de I’, J’ et de l’ellipse-lieu par une affinité d’axe (OI) transformant K en J.





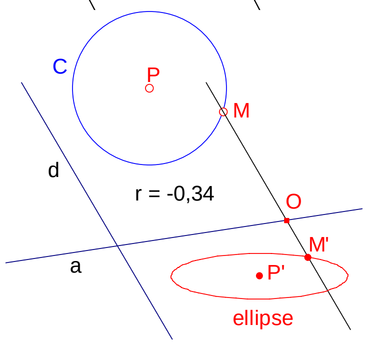
ouvrir la figure cabri

Voici un complément sur l’affinité :



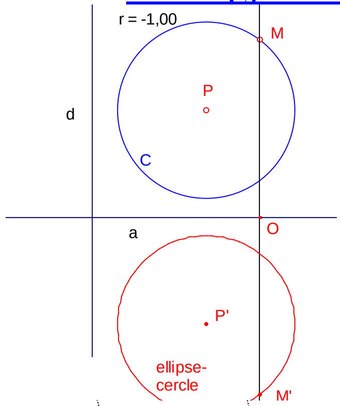
Soient deux droites a et d, un nombre r et un point M ; construire la parallèle d’ par M à d, le point O intersection de d’ et de a, puis le point M’ homothétique de M dans l’homothétie de centre O et de rapport r.
L’application du plan dans lui-même qui associe M à M’ est une affinité d’axe a, de direction d et de rapport r.

L’image d’un cercle est alors une ellipse.



On peut construire la macro "affinité" :
objets initiaux : l’axe a, la direction d, le rapport r et un point M,
objet final : le point image M’.

ouvrir la figure cabri

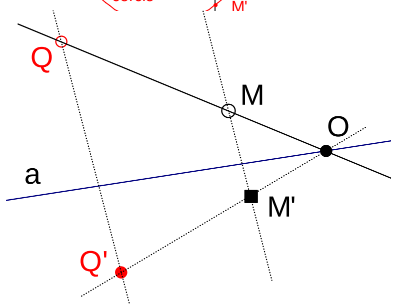


Exercice :

Transformer les paramètres de l’affinité (axe, direction et rapport) pour que l’affinité soit une symétrie axiale (symétrie orthogonale).

Réponse : il faut que a $\perp$ d et r = -1.

De plus, si a et d sont sécantes et r = -1, alors l’affinité est une symétrie oblique.

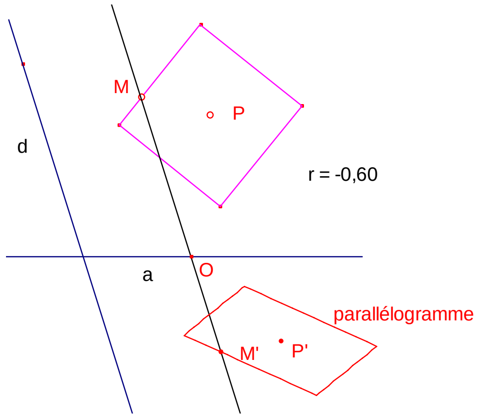


Autre construction de l’image d’un point M par une affinité donnée par son axe, un point Q et son image Q’ :
Construire M’, intersection de la droite parallèle à (QQ’) par M et de la droite (Q’O), où O est le point d’intersection de la droite (QM) et de l’axe a.
(il faut évidement que (QM) ne soit pas parallèle à a).
Justification : théorème de Thalès.
On peut alors construire une autre macro "affinité-point" :
o.i. : l’axe a, les points Q et Q’, et un point M
o.f. : le point image M’ .

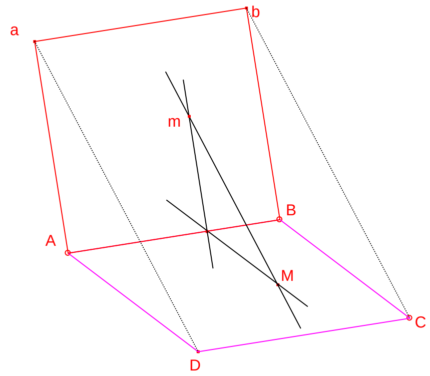
ouvrir la figure cabri

Image d'un carré :

On peut démontrer que l'image d'un carré par une affinité est un parallélogramme.

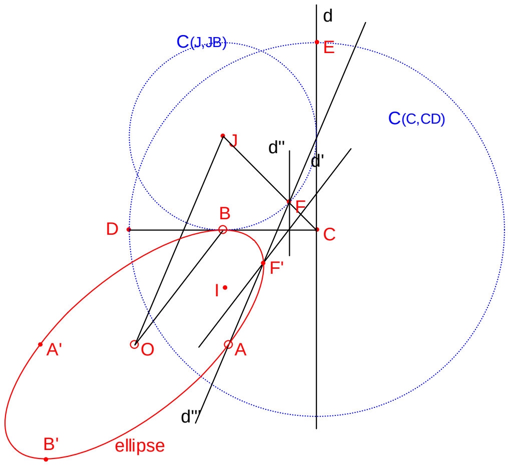


Réciproquement, on peut considérer tout parallélogramme comme l'image d'un carré par une affinité (et pas d'une seule !).
Sur cette figure on a construit le parallélogramme ABCD,
puis sur le côté [A,B] le carré ABba.
aD et bC sont parallèles. Soit M quelconque dans le parallélogramme, il est facile d'avoir son image réciproque m par l'affinité qui envoie a sur D, b sur C.
Ce sont ces propriétés qui sont utilisées en perspective cavalière.



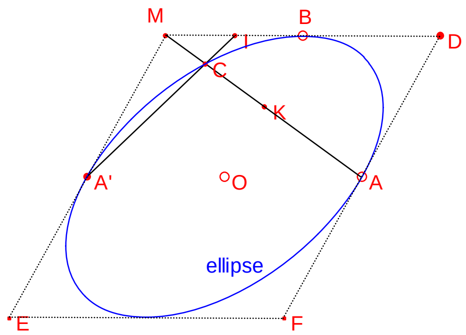
Exercice :
Construire une macro donnant une ellipse en connaissant son centre et une extrémité de deux diamètres conjugués.

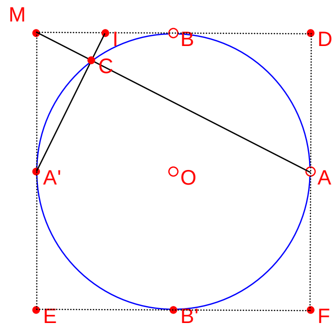
Solution



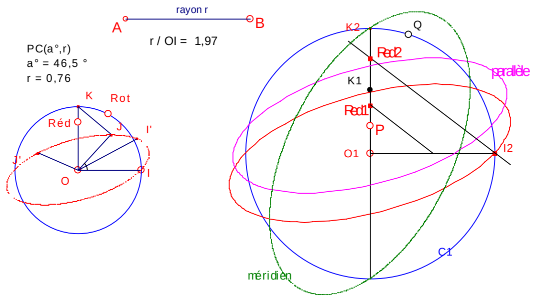
Autre solution

Ouvrir la macro
ellipse-3 pts.mac

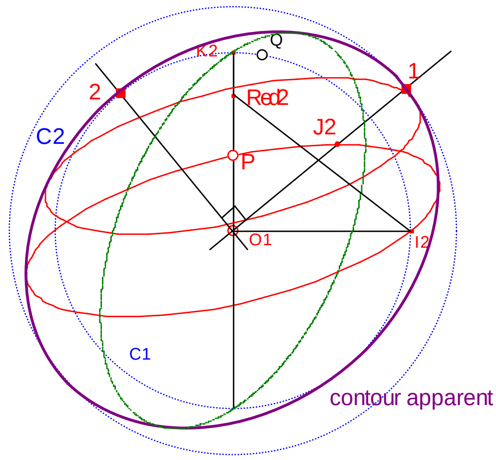




Application à la perspective d'une sphère :
Ouvrir la figure "[sphère en PC]" :



On peut démontrer que le contour apparent de la sphère est une ellipse dont le grand axe est une fuyante et de longueur $2\cdot Red_2I_2$, où Red_2 est le point homothétique de Red_1 dans l'homothétie de rapport r/OI ; le petit axe est de longueur $2\cdot OI_2$.
On construit donc le cercle $C_1(O_1,O_1I_1)$ et le cercle $C(O_1,Red_2I_2)$.
La droite (O_1J_2) coupe le cercle C_2 au point "1", extrémité du grand axe ; l'orthogonale à (O_1J_2) par O_1 coupe C_1 au point "2", extrémité du petit axe.
On applique la macro " ellipse-3 pts.mac " aux points O_1, "1" et "2" et on obtient l'ellipse contour apparent de la sphère en PC.



Cette ellipse est l'image du grand cercle de la sphère contenu dans le plan perpendiculaire à la direction de la projection. Tout autre grand cercle est un méridien de la sphère, et donc en PC une ellipse tangente intérieurement à l'ellipse contour.
ouvrir la figure ci-contre : [sphère en PC-final.fig]