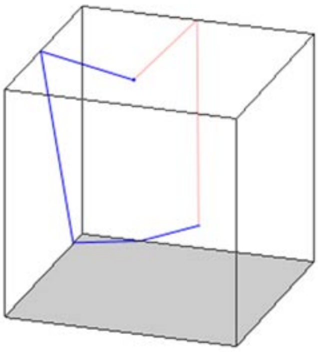
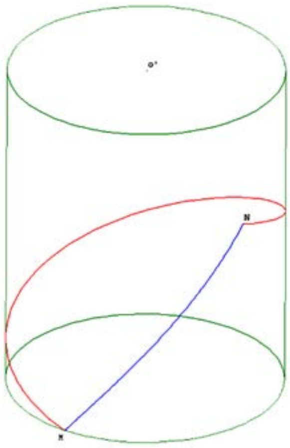
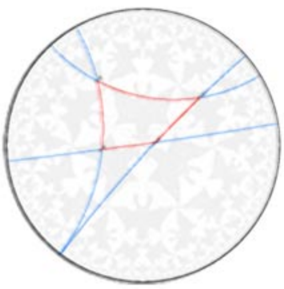
AUBRY Matthieu
BLOME Pascal

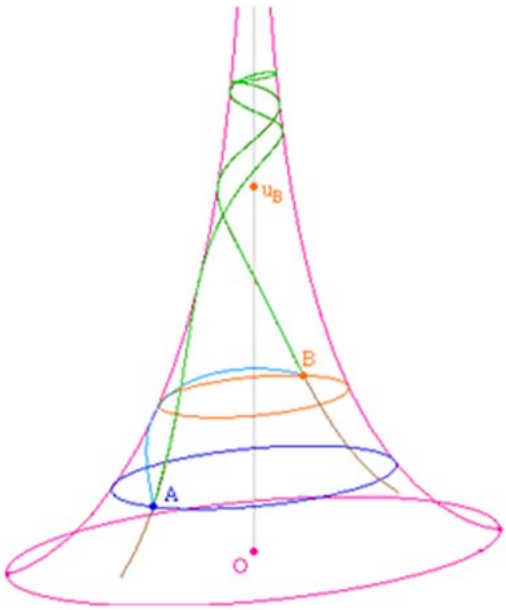
TPE 2002-2003
Lycée Pilote Innovant

Problématique : La ligne droite est-elle le plus court chemin sur différentes surfaces, dans différents milieux ?









Thème : Espace et mouvement

Table des matières

Introduction

La ligne droite est-elle le chemin le plus court sur différentes surfaces, dans différents milieux ?

Cette question qui paraît si simple est pourtant fort compliquée. De quelles surfaces parlons-nous ? De quels milieux est-il question ? Comment définir le chemin le plus court ? Pouvons-nous dire que la droite est le chemin le plus court dans tous les cas ? Entendons-nous par là le chemin le plus court *géométriquement* ou *temporellement* ? Autrement dit, le chemin le plus *court* ou le plus *rapide* ?

A travers notre travail, nous allons tenter de répondre à ces questions, ainsi qu'à de nombreuses autres, tout aussi importantes.

Ces notions sont fondamentales pour la compréhension (même partielle) de notre univers. Il serait impossible de faire quelconque voyage interstellaire sans s'être posé ces questions, et y avoir trouvé des éléments de réponses. Le questionnement sur les différentes géométries permet aussi le développement d'une certaine ouverture d'esprit, et rend possible la compréhension de la physique relativiste.

Nous étudierons dans une première grande partie le chemin *le plus court* sur différentes surfaces. Plus particulièrement nous nous attacherons à le montrer et démontrer sur des surfaces particulières : le cube, le cylindre, la sphère, le disque de Poincaré et la pseudosphère de Lobatchevski.

Dans un second temps nous verrons plus particulièrement le cas de la lumière pour étudier le chemin le plus court dans différents milieux. Ainsi nous exposerons l'expérience du mirage que nous avons réalisée, puis nous expliquerons en détail le phénomène général. Cela nous amènera logiquement à la démonstration de la loi de Descartes.

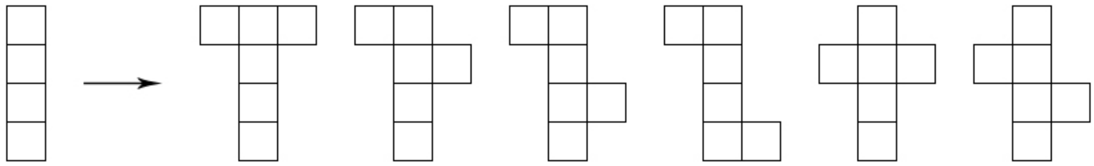
Le chemin le plus court sur le cube

Le cube étant un espace euclidien, nous savons que le chemin plus court d'un point à un autre est la droite qui relie ces deux points sur son patron. Il existe en tout 11 patrons du cube (voir ci-dessous) : la difficulté est donc de choisir le bon patron pour déterminer le chemin le plus court.

Comment trouver les patrons du cube ?

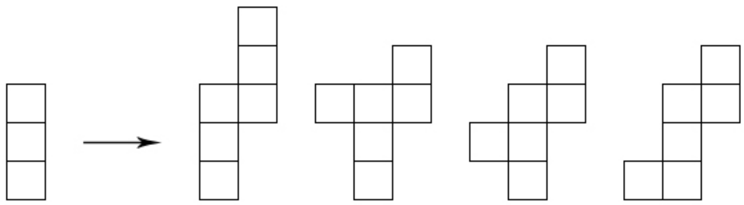
Les patrons sont constitués des six faces du cube et peuvent être obtenus en 3 étapes successives.

On sait qu'on ne peut aligner plus de quatre bases, sinon une face serait présente en double. On aligne donc quatre carrés et on dispose les deux derniers sur les côtés.

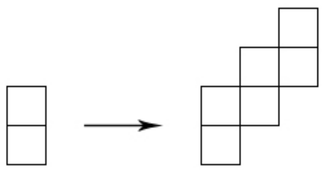


On obtient les 6 premiers patrons.

Si on s'interdit d'aligner plus de trois carrés on découvre alors quatre nouveaux patrons.



On trouve le dernier patron en alignant seulement deux carrés (le minimum possible),



Il n'y a pas d'autres solutions possibles.

Quel patron faut-il choisir pour relier deux points par le plus court chemin ?

Imaginons des fourmis parcourant la surface d'un cube.

Il n'y a que deux possibilités pour placer deux points sur un cube : soit sur des faces opposées, soit sur des faces adjacentes. Traitons les deux cas successivement.

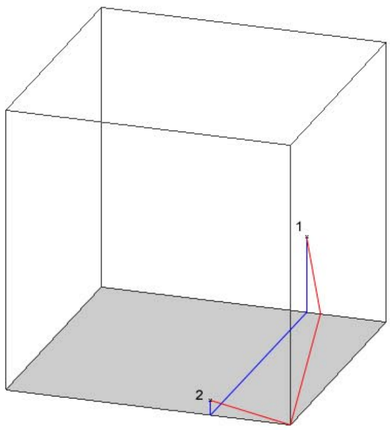
1) Deux points sur des faces opposées

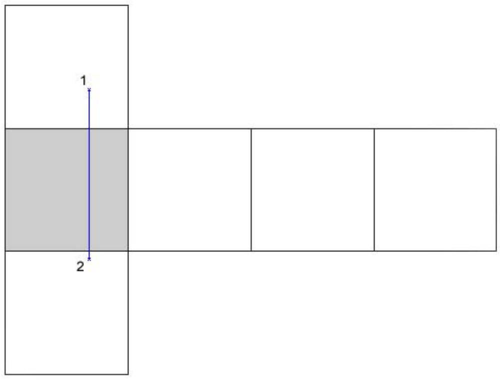
Si les points se trouvent sur des faces opposées il y a quatre chemins possibles utilisant chacun au moins 3 faces alignées. Traitons dans un exemple les deux cas les plus probables.

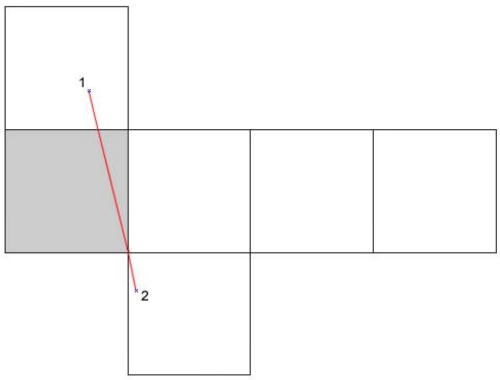
Exemple n°1

Longueurs

Trajet bleu : 0,82
Trajet rouge : 1,00





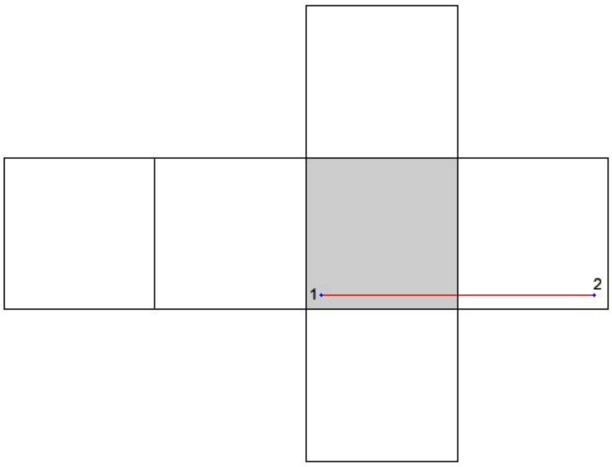


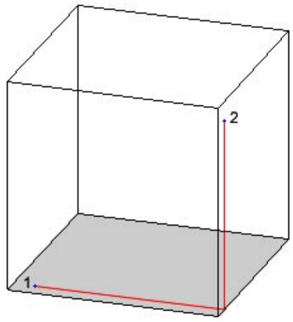
Il existe deux possibilités envisageables pour tracer le plus court chemin reliant les deux points : le trajet bleu utilisant 3 faces, et le rouge qui en utilise 4. Selon la position des points l'un est plus court que l'autre. La seule solution est donc de les mesurer ou de les calculer avec le théorème de Pythagore.

2) Deux points sur des faces adjacentes

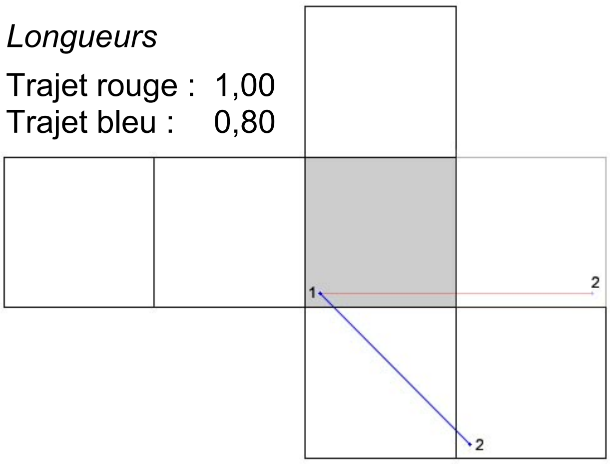
Si les points se trouvent sur des faces adjacentes les solutions sont plus difficiles à trouver, car il faut considérer d'avantage de solutions possibles en fonction de la position des points sur la face. En général elles se trouvent sur un des deux patrons partiels suivants (voir exemples) en choisissant la bonne base.

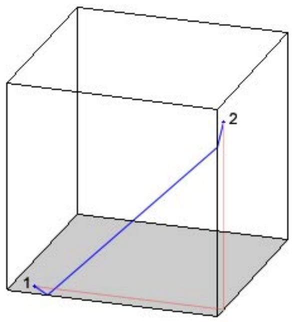
Exemple n°2





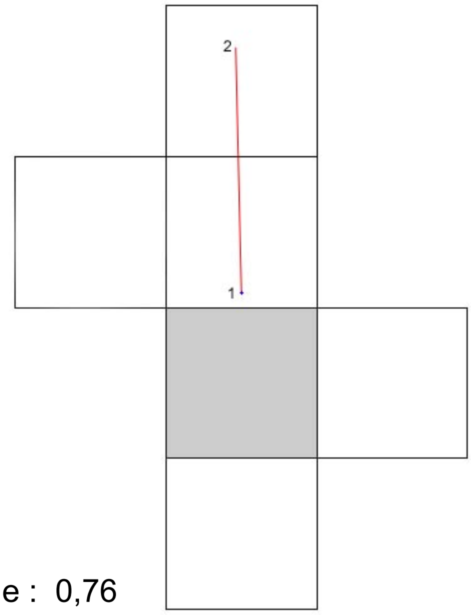
Ici nous voyons bien que le chemin qui relie les points 1 et 2 n'est pas le plus court. Sur ce patron néanmoins un seul tracé est possible. Nous devons donc utiliser un autre patron.

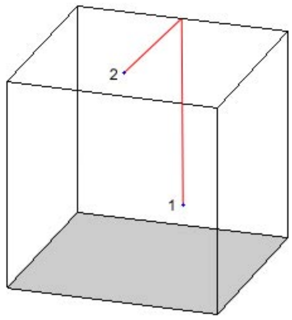




Nous voici devant un tracé plus avantageux. Le chemin bleu est bien plus court que le rouge, et cela même s'il utilise trois faces au lieu de deux. Ceci montre bien qu'il existe deux possibilités pour trouver le chemin le plus court sur deux faces adjacentes : soit sur deux faces, soit sur trois faces, en angle.

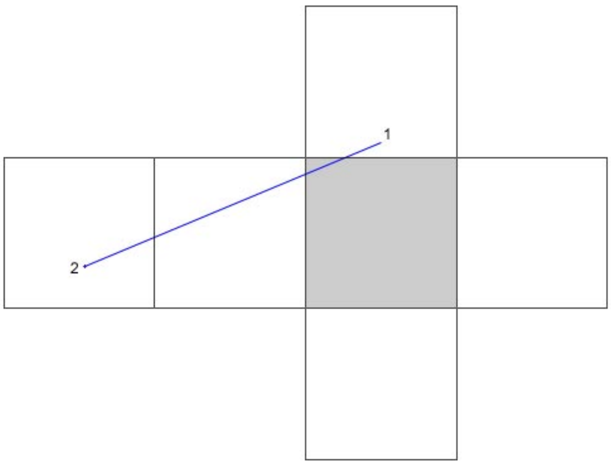
Exemple n°3

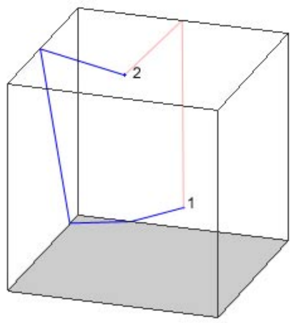




Longueurs

Trajet rouge : 0,76
Trajet bleu : 1,00





Il est facile de voir que le chemin rouge est largement plus court que le bleu. En effet, le chemin bleu emprunte un trajet inutile, et beaucoup plus long : 4 carrés contrairement au rouge qui n'en n'utilise que 2.

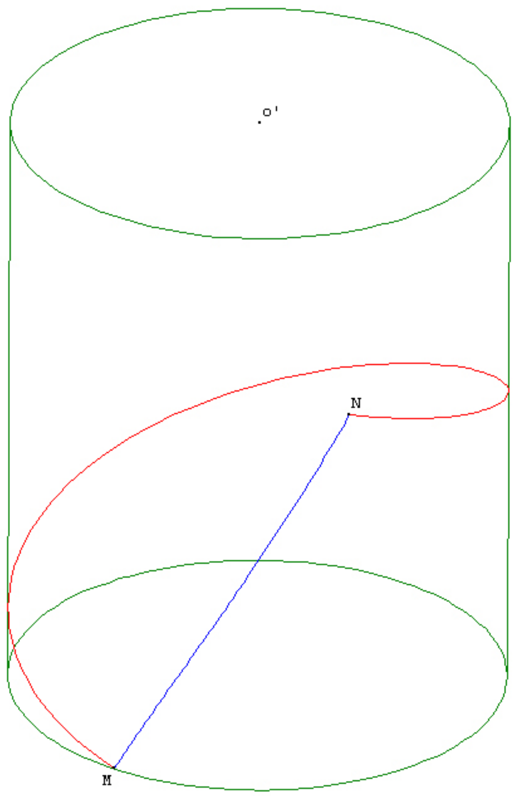
Existe-t-il une méthode ?

Pour relier deux points par le chemin le plus court, il faut donc observer le cube et choisir les faces qui conviennent. Il n'y a pas de véritable méthode pour définir le chemin le plus court : il faut donc tester les solution les plus probables, en éliminant préalablement les autres solutions (comme le trajet bleu ci-dessus qui au premier coup d'œil paraît beaucoup plus long que le rouge).

La recherche du plus court chemin sur le cube se limite donc au tracé et au calcul des différentes possibilités de trajets. On ne peut en déduire une règle fonctionnelle, car le patron à utiliser dépend des placements des points sur les faces, il existe donc de nombreuses de possibilités !

Le chemin le plus court sur le cylindre

Le plus court chemin d'un point A à un point B sur une surface développable est la ligne droite reliant les deux points sur le patron du solide. Ainsi le plus court chemin d'un point à un autre sur le cylindre une droite sur le patron, mais comment la représenter en trois dimensions ? Nous disposons de l'équation paramétrée de l'hélice cylindrique, c'est-à-dire que l'espace est muni d'un repère ; un point est repéré par ses coordonnées donnés en fonction d'un paramètre. Nous nous proposons de démontrer que l'hélice est le chemin le plus court. Pour cela nous supposons que le cylindre est infini, les point situés sur la face latérale.



L'équation paramétrique de l'hélice 1, la bleue sur le schéma (elle est dire « dextre » : elle monte dans le sens trigonométrique et un observateur placé à l'extérieur la voit, lorsqu'il est devant, monter de gauche à droite) :

$$x \to \; 2 \times \cos(t)$$
$$y \to \; 2 \times \sin(t)$$
$$z \to \; \frac{\mathrm{b}_1}{\alpha_1} \times t$$

L'équation paramétrique de l'hélice 2, la rouge sur le schéma (elle est dite « senestre » : elle monte dans le sens des aiguilles d'une montre) :

$$x \to 2 \times \cos(2\pi - t)$$
$$y \to -2 \times \sin(2\pi - t)$$
$$z \to -\frac{b_1}{2\pi - \alpha_1} \times t$$

L'une des deux hélices est toujours la plus courte si elle représente une droite sur son patron. Pour le prouver, calculons la longueur de l'hélice et comparons la longueur obtenue à la longueur du segment AB sur le patron.

Longueur de l'hélice cylindrique entre $M(x,y,z)$ et $M'(x+dx,y+dy,z+dz)$ proche de M

$$MM'^2 = (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

$$x = 2\times\cos(t) \qquad dx = -2\times\sin(t)\times dt \qquad \frac{dx}{dt} = x'(t)$$

$$y = 2\times\sin(t) \qquad dy = 2\times\cos(t)\times dt$$

$$z = b\times t \qquad dz = b\times dt$$

On obtient :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$
$$(ds)^2 = 4\times\sin(t)^2\times(dt)^2 + 4\times\cos(t)^2\times(dt)^2 + b^2\times(dt)^2$$
$$(ds)^2 = (dt)^2\times\left(4\times\sin(t)^2 + 4\times\cos(t)^2 + b^2\right)$$
$$(ds)^2 = (dt)^2\times\left(4+b^2\right)$$
$$(ds) = (dt)\times\sqrt{4+b^2}$$

$L(t) = \sqrt{4+b^2}\times t$ car $L(t) = \int_0^t ds = \int_0^t \sqrt{4+b^2}\times dt$

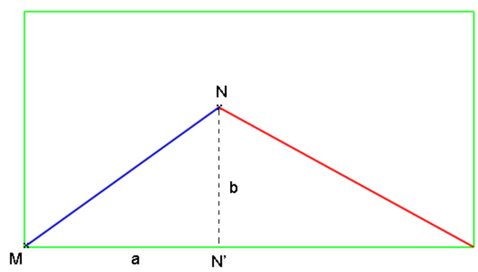
En remplaçant par les valeurs que nous avons utilisées dans GeoSpace, nous obtenons :

$$S(a_1) = \sqrt{4+\left(\frac{b}{\alpha_1}\right)^2}\times\alpha_1$$
$$S(a_1) = \sqrt{\left(4+\frac{b^2}{\alpha_1{}^2}\right)\times\alpha_1{}^2}$$
$$S(a_1) = \sqrt{4\times\alpha_1{}^2 + b_1^2}$$

$S(a_1)$ correspond à la longueur de l'hélice sur le cylindre.

Longueur de la droite MN sur le patron

Calculons maintenant la longueur du plus court chemin, la droite sur le patron.



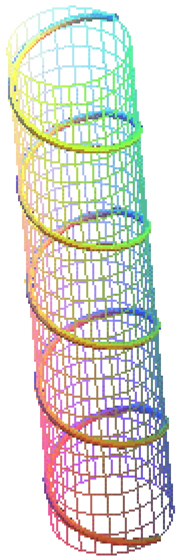
$a = r\times\alpha_1$ avec r le rayon du cercle et α_1 l'angle MON'.

On a avec le théorème de Pythagore :
$MN = \sqrt{a^2 + b^2}$
Pour $r = 2$ on a $a = 2 \times \alpha_1$

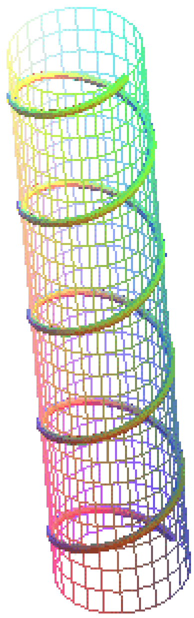
$MN = \sqrt{4\alpha_1{}^2 + b^2}$

Quel est donc le chemin le plus court ?

On remarque bien sûr que la longueur de l'hélice cylindrique est la même que la droite sur le patron. Le chemin le plus court en deux dimensions est une droite qui correspond à une hélice bien spécifique dans trois dimensions.



Hélice senestre



Hélice dextre

Le chemin le plus court sur la sphère

Après avoir étudié le cas du chemin le plus court sur des surfaces développables (cube et cylindre), nous nous proposons de déterminer la plus courte distance sur une surface plus complexe : la sphère. **Comment déterminer le plus court chemin, la géodésique, entre deux points A et B sur une sphère quelconque ?** Une utilisation concrète en serait alors le trajet que doit emprunter un avion effectuant le vol Poitiers-Seattle que nous étudierons dans une seconde partie.

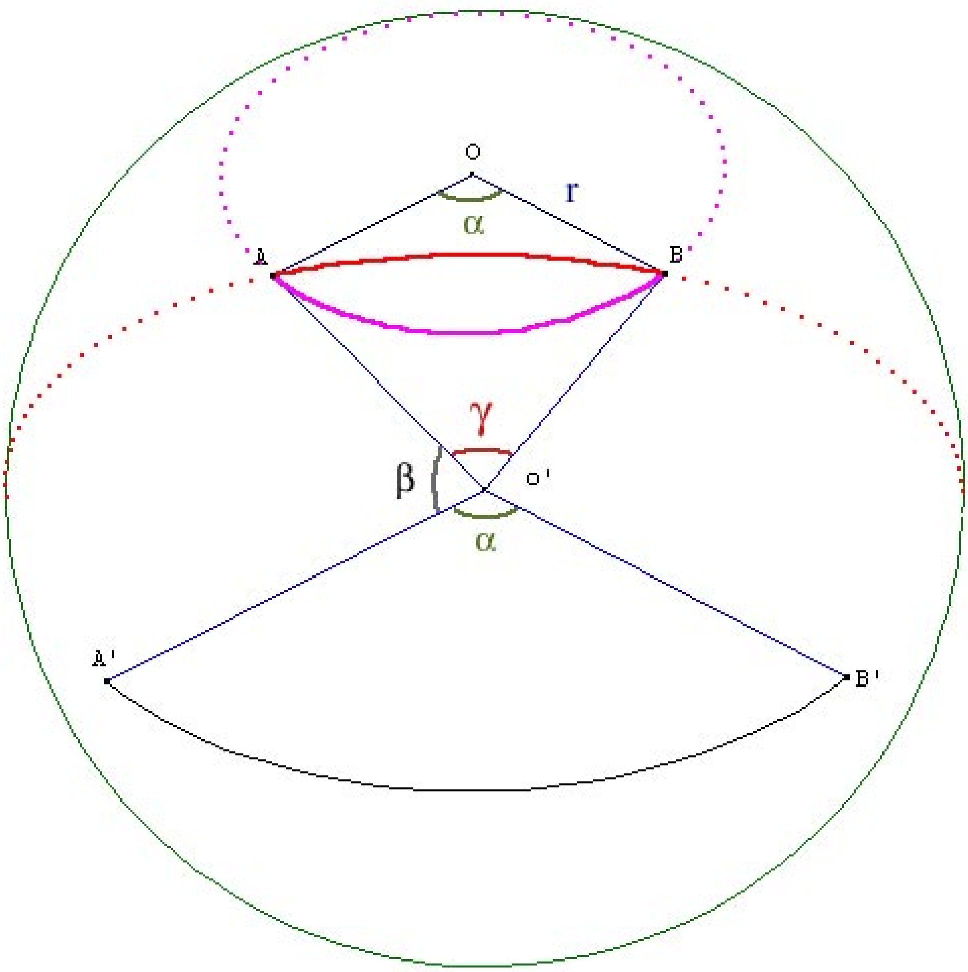


Schéma 1

Pour effectuer la distance AB, trois solutions sont envisageables :

- on trace la parallèle à l'équateur passant par A et B avec pour centre O, ce qui paraît au premier abord le plus naturel
- on trace le cercle passant par A, B et dont le centre est le point O', centre de la sphère. Ce cercle est appelé « grand cercle »
- on recherche une autre courbe

Nous ne traiterons pas la troisième possibilité car on admet que le chemin cherché est un arc de cercle. Comparons donc simplement les deux premiers cas successivement, et démontrons lequel est le chemin le plus court.

Distance AB sur la parallèle à l'équateur

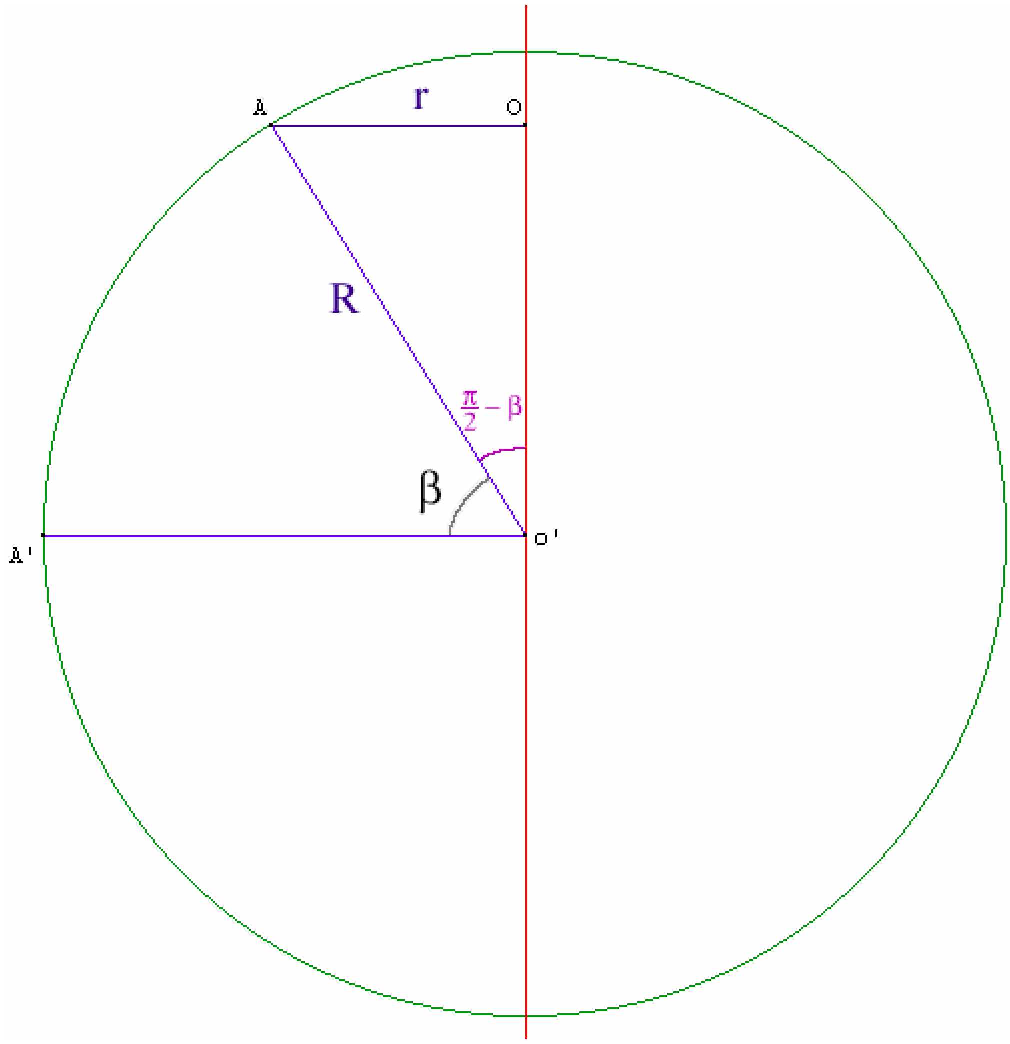


Schéma 2

$$r = R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \Leftrightarrow r = R\cos\beta$$

$$AB_1 = R\cos\beta \times \alpha$$

Nous avons donc calculé la distance AB_1, représentée en **violet** sur le schéma 1.

Distance AB sur le grand cercle passant par A et B

Pour calculer la distance AB sur le grand cercle (représentée en rouge), il faut calculer la valeur de l'angle γ. Comme l'on connaît la valeur de r, il suffira de calculer $AB = r \times \gamma$

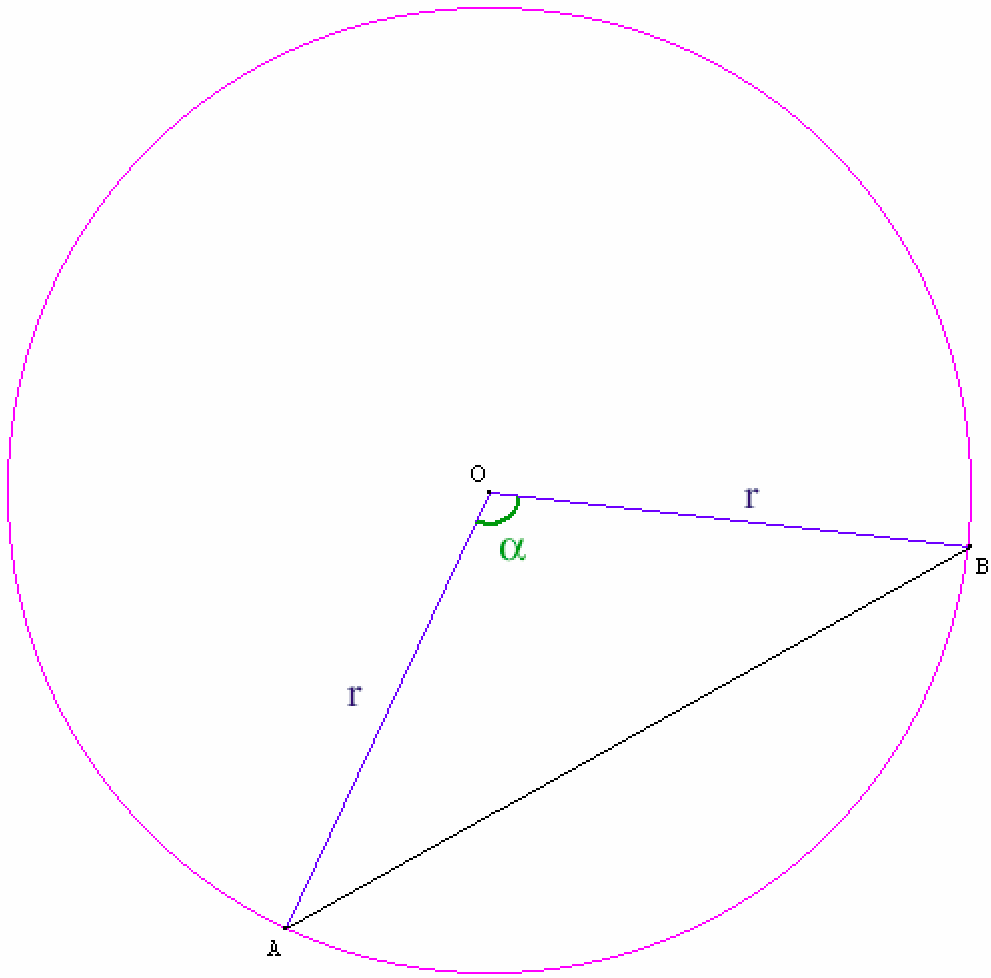


Schéma 3

Avec le théorème d'Al Kashi dans le triangle ABO :

$$AB^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos\alpha$$

$$AB = r\sqrt{2(1-\cos\alpha)} = 2r\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ car } \frac{1-\cos 2x}{2} = \sin^2 x \Leftrightarrow 1-\cos\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right), x = \frac{\alpha}{2}$$

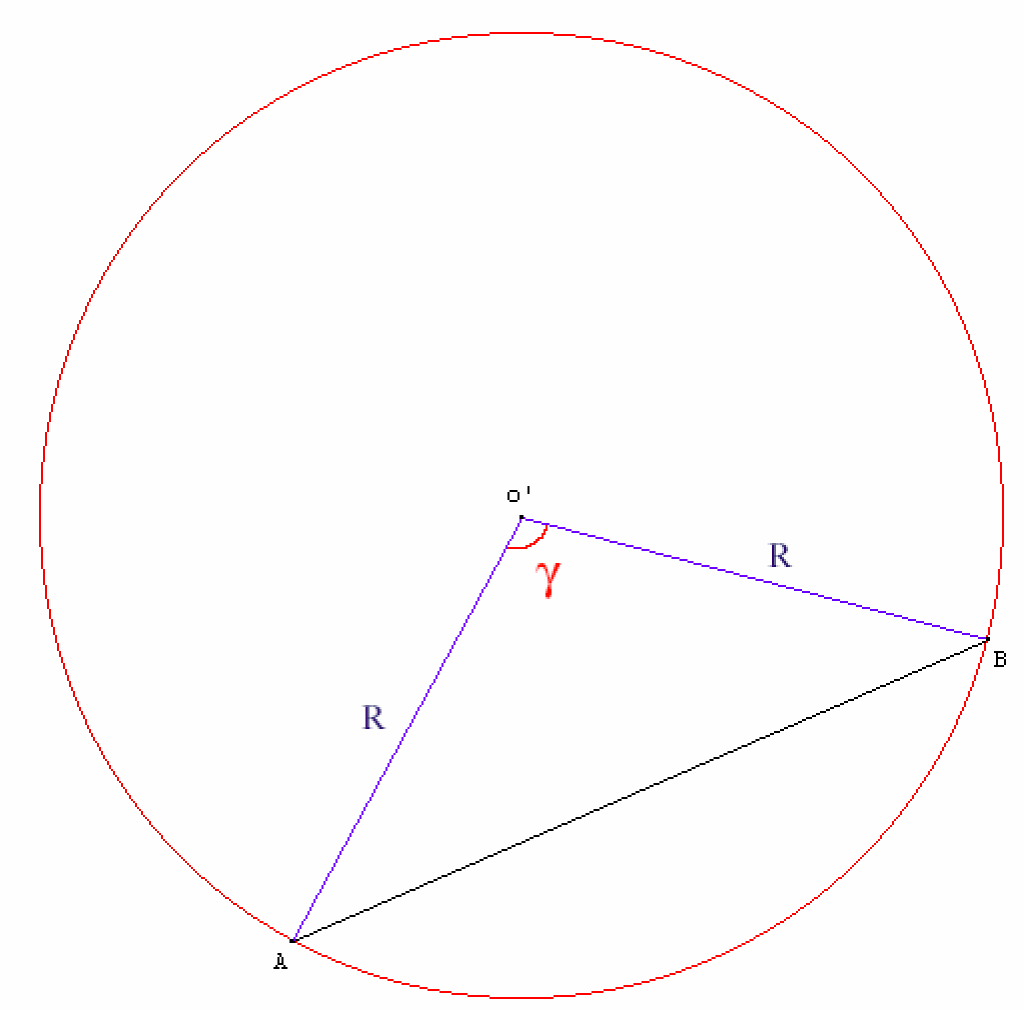


Schéma 4

On cherche γ avec Al Kashi :

$AB^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\gamma = 2R^2(1-\cos\gamma)$ or on a $AB = 2r\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$4r^2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 4R^2\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$2r\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2R\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ or $r = R\cos\beta$

$$R\cos\beta\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = R\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\gamma = 2\arcsin\left(\cos\beta\times\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$AB_2 = r\gamma$$

Nous avons donc calculé la distance AB_2, représentée en **rouge** sur le schéma 1.

Quel est le chemin le plus court ?

Il s'agit maintenant de déterminer le chemin le plus court entre la distance AB_1 et la distance AB_2. Pour cela nous avons choisi de calculer les 2 distances séparément pour deux villes sur le globe terrestre :

	Longitude	Latitude
Poitiers (France)	0°	47°
Seattle (USA)	122°	47°

Rayon terre : 6370 km

$$AB_1 = 6370 \times \cos\left(\frac{47\pi}{180}\right) \times \frac{122\pi}{180}$$

$$AB_1 = 9250.39 \text{ km}$$

$$AB_2 = 6370 \times \arcsin\left(\cos\left(\frac{4\pi}{180}\right) \times \sin\left(\frac{122\pi}{2 \times 180}\right)\right)$$

$$AB_2 = 8142.39 \text{ km}$$

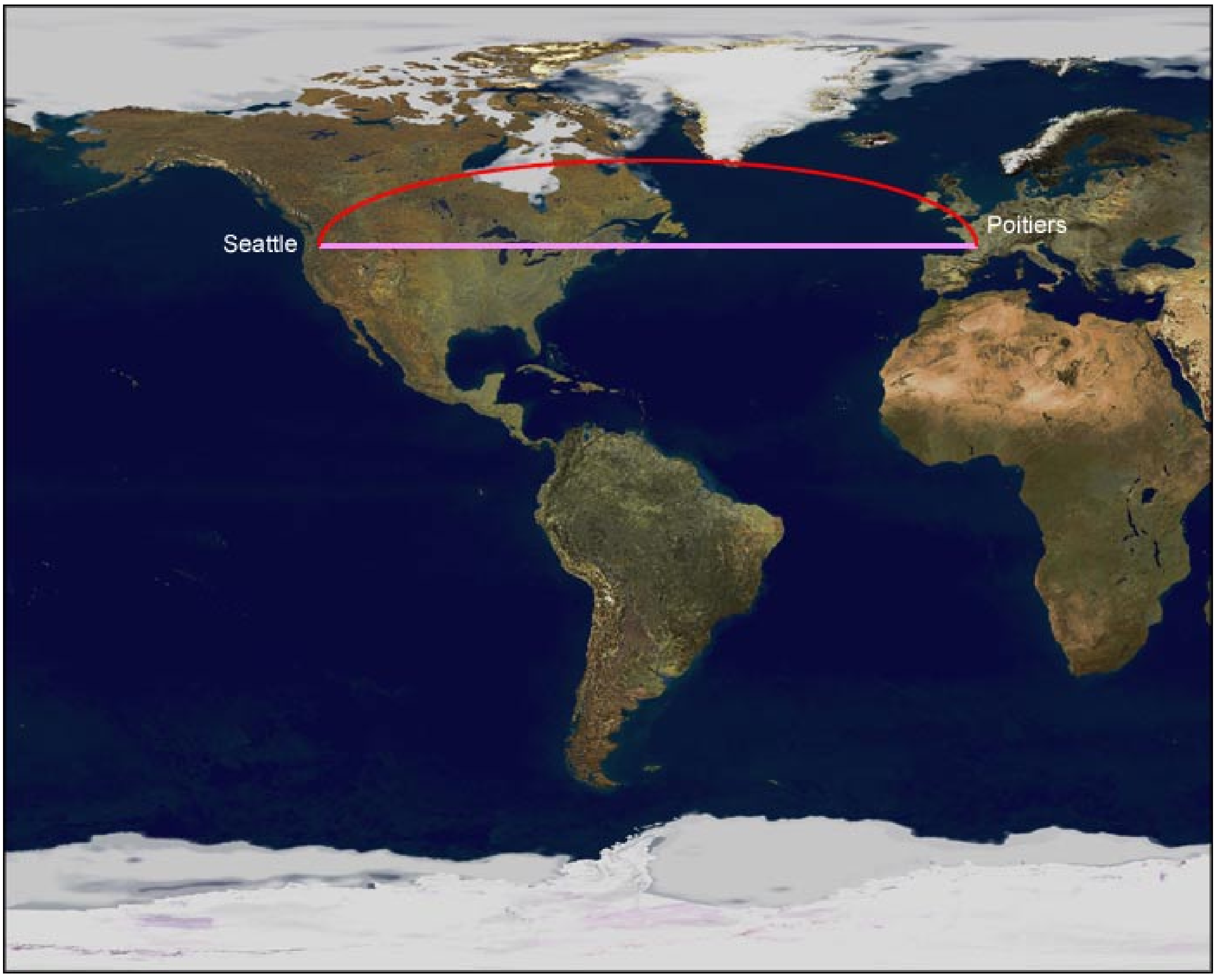
$AB_1 > AB_2$
$AB_1 - AB_2 = 9250.39 – 8142.39 = 1108$ km

Ainsi la distance AB_2 qui correspond à la distance AB sur le grand cercle est largement inférieure à la distance AB_1 : **plus de 1108km de différence !**

Voici les deux distances représentées graphiquement sur un globe terrestre vu à la verticale du pôle nord :

Comparaison des deux distances sur un globe

Quel serait le résultat d'un tel tracé sur un planisphère ? Le chemin le plus court serait-il la ligne droite allant de Poitiers vers Seattle, comme le pensent beaucoup de personnes ?



Comparaison des deux distances sur un planisphère

La sphère n'est pas un solide développable : une écorce d'orange éclate si on la plaque sur un plan et une feuille de papier se froisse sur une sphère. Donc les distances sur la sphère ne peuvent être reportées exactement sur un plan. Ceci explique que le tracé du plus court chemin en 3 dimensions ne correspond pas au tracé du plus court chemin dans un espace en 2 dimensions.

Toutes les cartes de type planisphère sont donc fausses !

De plus, nous avons contacté un responsable des trajets d'Air France qui nous a longuement expliqué le fonctionnement et la mise en place des chemins empruntés par les avions chaque jour. Il a d'ailleurs été étonné par la précision de notre calcul ! En effet il n'y avait que très peu de différences avec les plans de vol. Les différences s'expliquent selon lui suite à des facteurs externes : le vent, les turbulences (et la météo en général), le poids de l'avion, les routes parfois imposées au dessus de certains Etats, etc.

Cette prise de contact fut réellement enrichissante car elle a pu confirmé la justesse de cette démonstration !

Conséquences d'une telle démonstration ?

Quelles conséquences un tel calcul peut-il avoir sur les transports, l'environnement et la société en général ?

Sachant qu'un Boeing 747 vole en moyenne à 970km/h et consomme 15t/h, il parcourt 1108km en 1h09 consommant alors 17 tonnes de kérosène !

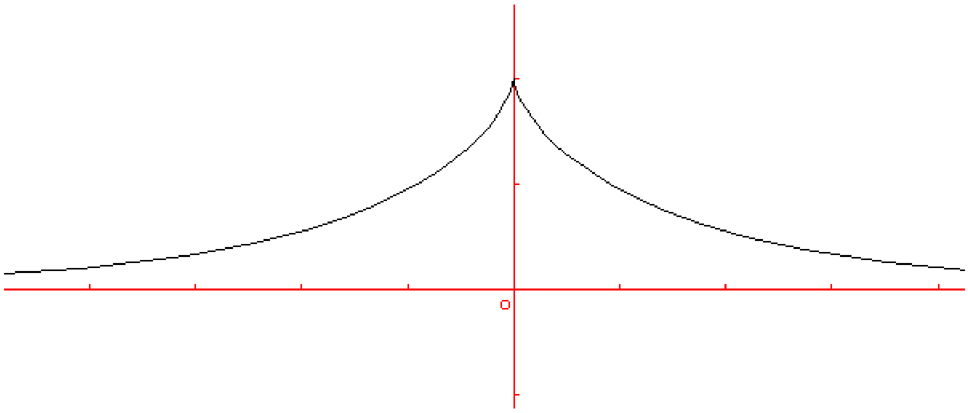
Nous pouvons donc en conclure que sur un trajet tel que Poitiers-Seattle aller retour, emprunter le chemin le plus court plutôt que le chemin parallèle à l'équateur fait économiser 34T de carburant, **soit 107T de CO_2 de moins de dégagées dans l'atmosphère**… minimisant un bilan déjà très lourd pour l'environnement (plus de 10 millions de T de kérosène brûlées chaque jour).

Les conséquences sont donc gigantesques pour les communications et les transports : un temps immense est gagné sur toutes les distances parcourues. **La dégradation de l'environnement est de plus limitée, ce qui permet de mettre en avant l'utilité des mathématiques dans un tel domaine !**

La géométrie de Lobatchevski

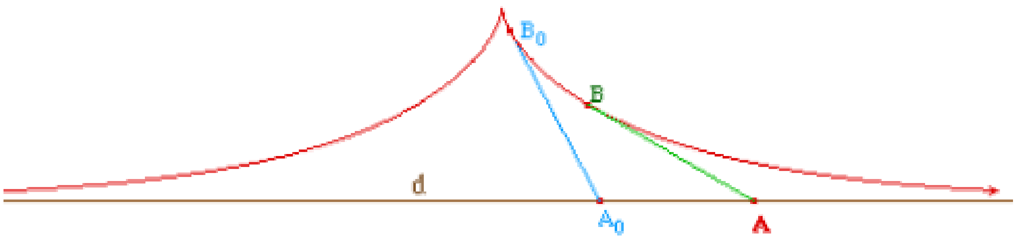
Lobatchevski construit sa géométrie, remplaçant le « cinquième postulat » d'Euclide, c'est-à-dire qu'on ne peut que tracer q'une seule parallèle à une droite, par la possibilité de faire passer par un seul point une infinité de parallèles à une droite. Sa géométrie est alors concrétisée sur la pseudosphère (après la découverte par Beltrami), surface de révolution établie à partir de la tractrice, courbe aux propriétés étonnantes.

La tractrice



La tractrice de formule $\begin{aligned} x &= 2\times\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)+2\times\cos(t) \\ y &= 2\times\sin(t)\end{aligned}$ est définie sur $t\in[-\pi;\pi]$.

Sa principale particularité est que la longueur de la tangente à l'axe des abscisses en tout point est constante, comme le montre le schéma ci-dessous.

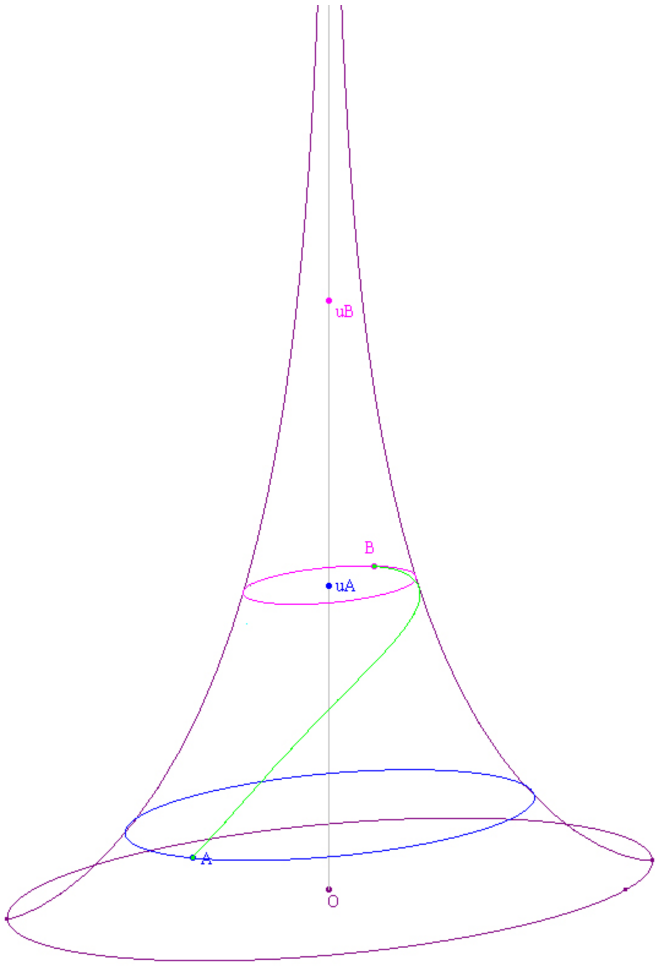


On a $B_0A_0 = BA$.

La pseudosphère est la surface de révolution engendrée par la rotation d'une tractrice autour de son asymptote. On montre que la pseudosphère a une courbure négative (constante). Mais comment établir la géodésique sur cette surface ? Comment faire de la géométrie, que représentent un cercle, une droite ? En d'autres termes, en quoi consisterait la géométrie que de petites bêtes intelligentes vivant à sa surface pourraient développer ?

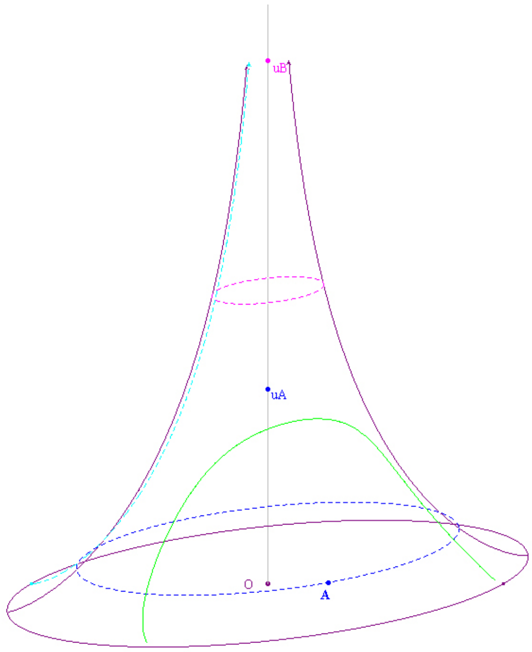
La géométrie sur la pseudosphère

La courbure négative constante permet donc d'établir dans cette géométrie une loi bien particulière : la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits, soit 180°. Ceci est donc en contradiction avec la géométrie euclidienne… d'où le nom de géométrie non euclidienne !

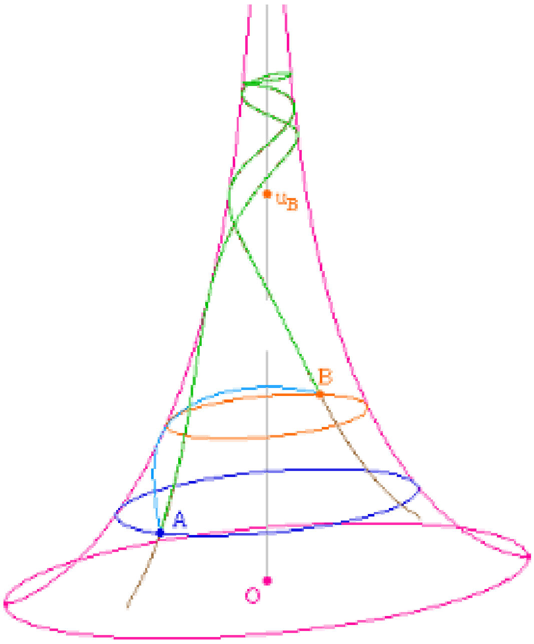


Le chemin AB le plus court est ici symbolisé par le chemin vert.

Que représentent une droite ou un cercle sur une telle surface ?



Tracé d'un cercle en vert



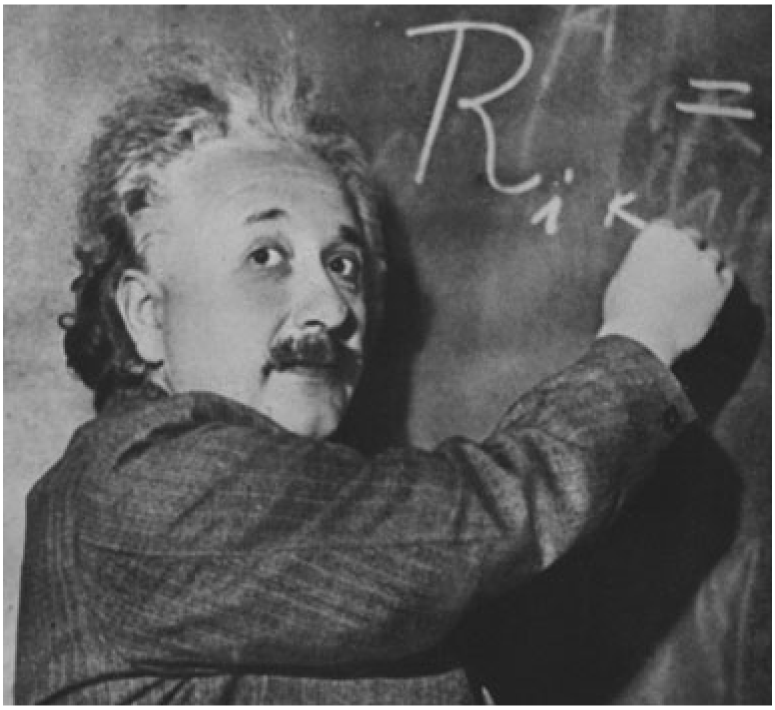
Tracé d'une droite en vert

Il existe donc plusieurs droites passant par deux points sur cette surface. Néanmoins une seule et une unique reste la plus courte. Cette démonstration a été faite par des chercheurs et mathématiciens français mais relève pour nous d'une bien trop haute complexité !

Un espace… courbe ?

Cette géométrie ainsi que toutes les autres fondées à partir du 19ème siècle permettent l'étude de notre univers, où certains savants ont constaté que **les grosses masses « courbent » l'espace** dans lequel ils évoluent. La plupart des phénomènes comme les trous noirs, la fameuse croix d'Einstein (5 points lumineux représentant pourtant une seule et même galaxie) ont été en partie élucidés. Les grosses masses fonctionnent à la manière de ce que l'on pourrait appeler des lentilles gravitationnelles **qui peuvent renverser, déformer, multiplier, agrandir ou rapetisser l'image d'un astre « transportée » par la lumière.**

Comprendre notre univers implique donc l'acceptation et la compréhension d'une géométrie différente de la nôtre.

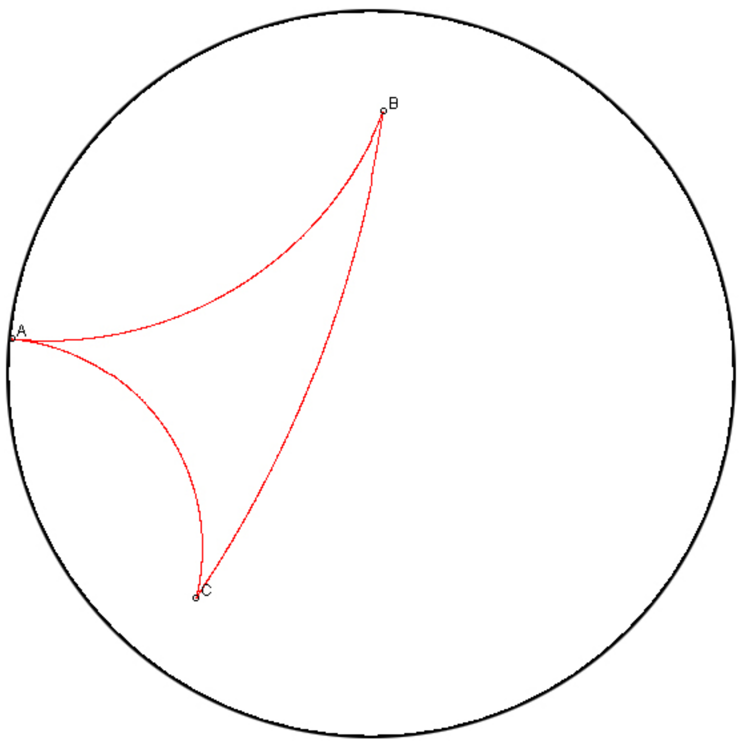


Einstein fut un des précurseurs dans la découverte des mystères de notre univers

Un autre modèle : Le disque de Poincaré

Nous venons d'étudier le cas de la sphère. Sur une sphère, la somme des angles d'un triangle est forcément supérieure à 180°. Mais depuis notre tendre enfance nos professeurs ne nous ont-ils pas enseigné que la somme des angles d'un triangle est forcément égale à 180° ? Comment expliquer cette contradiction ? Existe-t-il d'autres géométries ne répondant pas aux principales règles énoncées par Euclide ? Dans ces cas éventuels, la ligne droite peut-elle être le chemin le plus court ?

Un cercle… infini ?



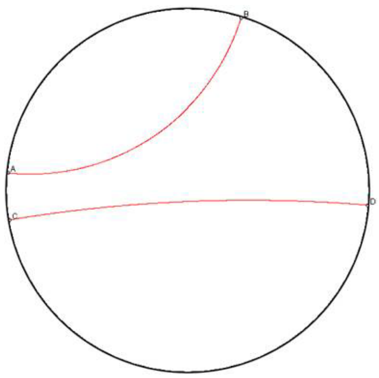
Distances :
- AB=7,85
- AC=7,43
- BC=3,88

Angles :
- BAC=0,4°
- ABC=13,1°
- ACB=20,4°

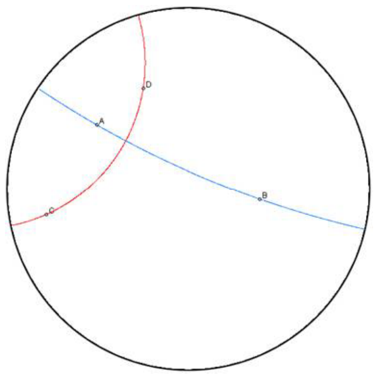
Cette simulation nous met bien devant un gros problème semblant inexplicable : les droites sont courbées, la somme des angles fait environ 34° et les distances ne correspondent pas aux mesures géométriques ! Pourtant on nous a toujours enseigné que la somme des angles d'un triangle faisait 180°, et une droite ne peut pas être courbé ; quant aux distances, comment une droite plus longue peut-elle être plus courte ? La réponse : **la géométrie non-euclidienne**. Le schéma ci-dessus est une modélisation d'un monde en deux dimensions, un cercle, répondant à une simple exigence : lorsqu'on s'approche du bord la pression augmente, les objets deviennent plus petits, ainsi que les droites qui deviennent alors courbes**. Le bord a une pression infinie et ne peut être atteint qu'en théorie par des êtres vivant sur ce monde.** Si nous choisissons 'R' comme rayon fini du cercle et 'r' la distance d'un point au centre de celui-ci, nous disons que la pression est proportionnelle à 'R^2-r^2'.

Cette équation a été établie par **Henri Poincaré**, célèbre mathématicien de notre siècle. **C'est le père de la géométrie non-euclidienne, une invention**

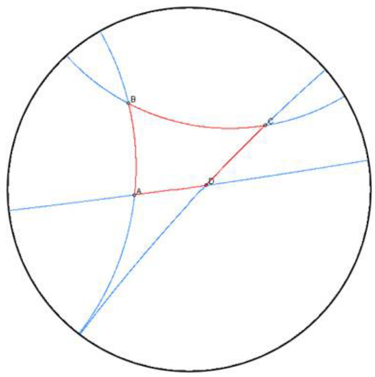
abstraite de mathématiciens afin de répondre à certaines exigences, notamment de la théorie de la relativité et de la physique quantique. Le but est de quitter les représentations ordinaires des choses et inventer une géométrie en conséquence. Il dit dans son livre *L'espace et la géométrie* (1908) : « Si l'espace géométrique était un cadre imposé à chacune de nos représentations, […] il serait impossible de se représenter une image dépouillée de ce cadre, et nous ne pouvons rien changer à notre géométrie. Mais il n'en est pas ainsi […] ». Il enchaîne alors avec l'exemple dont nous avons parlé précédemment et imagine comment des êtres vivant dans un tel espace pourraient se représenter la géométrie : en supposant que la lumière qui traverserait ce monde soit également influencée par la pression « de telle sorte que l'indice de réfraction soit inversement proportionnel à 'R^2-r^2' » (elle serait alors courbée tout comme les droites), cela compenserait donc la vision des choses tel que nous les voyons. Les êtres établiraient donc une géométrie différente de la notre, mais adapté à leur monde :



Une parallèle



Une perpendiculaire



Un rectangle

Cette modélisation a pour but de montrer que le monde dans lequel nous vivons n'est certainement pas celui que nous croyons être. Qu'est-ce qui nous prouve que notre monde ne répond pas à de telles exigences, dont nous ne pouvons être que les acteurs innocents, impuissants… et ignorants ?

Le chemin le plus court dans différents milieux

Après avoir étudié le chemin le plus court sur différentes surfaces : le cube, le cylindre, la sphère, le monde de la géométrie de Poincaré et sur la pseudosphère, nous nous proposons d'étudier le chemin le plus court dans différents milieux. Ceci est nécessaire car notre espace, notre univers dispose d'un volume et pas seulement d'une simple surface.

Pour cela, l'étude de la lumière nous paraît être la plus adaptée car ses propriétés peuvent être facilement exploitées, car comme tous les corps, certaines de ses propriétés varient en fonction du milieu traversé.

Nous avons dans un premier temps réalisé une expérience expliquant le phénomène du mirage, laquelle nous a permis dans un deuxième temps de démontrer la loi de Descartes.

La propriété de la lumière énoncée par Pierre de Fermat selon laquelle elle emprunte le chemin pour lequel le temps de parcours est minimum permet de définir le chemin le plus court et de l'observer.

Expérience du mirage

Dans différents milieux, quel peut être le chemin le plus court ? Dans un milieu homogène, la lumière emprunte toujours la ligne droite. La vitesse de la lumière dans le vide est la plus grande vitesse possible, et ne pourra jamais être dépassée.

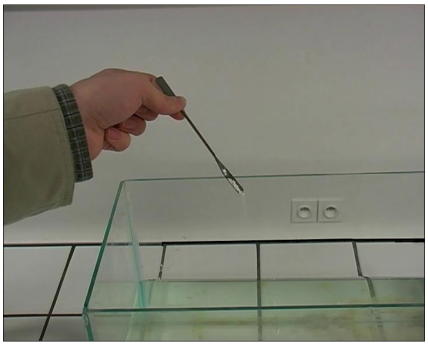
Voyons quel chemin elle emprunterait dans un milieu non homogène, composé donc de plusieurs milieux à indices différents. **Le chemin le plus court serait-il toujours la ligne droite ?**

Matériel

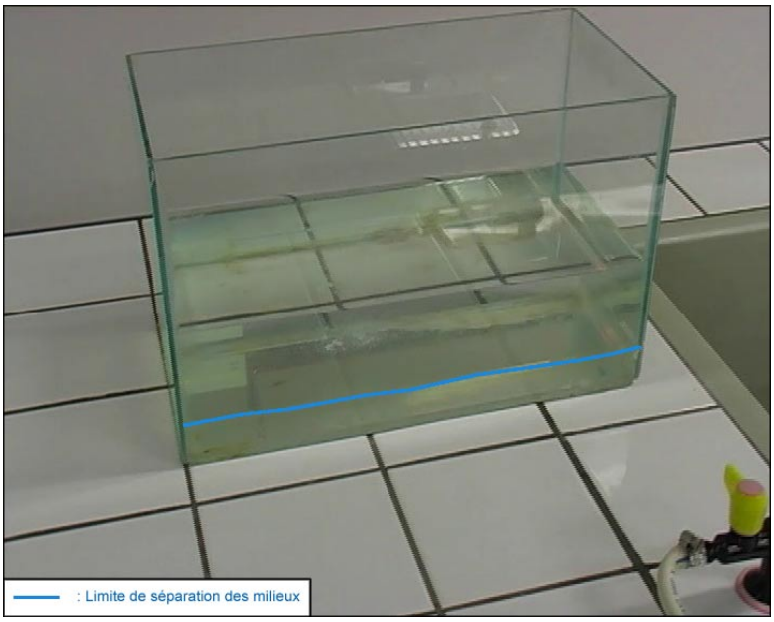
Laser (2mW)
Cuve parallélépipède (50*25*10 cm)
Eau : environ 20L
Sucre : 4kg
Entonnoir à tube long
Béchers
Agitateur magnétique
Plaque chauffante
Lait en poudre

Protocole de l'expérience

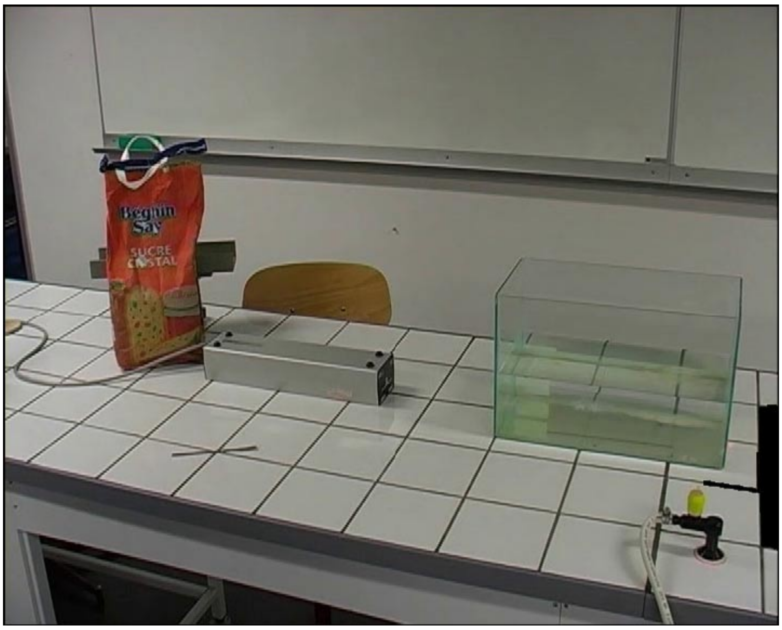
- Il est nécessaire de préparer l'eau saturée en sucre, qui constituera le milieu non homogène. Pour cela, il faut dissoudre du sucre dans l'eau jusqu'à ce qu'il reste des grains non miscibles **: l'eau est alors dite saturée, sa densité est plus élevée que celle de l'eau.** L'expérience nécessitera 4L d'eau saturée environ.
- Remplir la cuve par environ 15L d'eau, puis ajouter de la poudre de lait afin de rendre le futur rayon laser bien visible dans le noir.



- Verser doucement dans un entonnoir l'eau saturée. L'eau doit s'écouler lentement et verser les 4L doit prendre environ 20 minutes. Une fois terminée, il doit apparaître clairement au fond de la cuve la différence entre les 2 milieux. L'eau saturée est bien sûr au fond (elle est plus lourde que l'eau normale).



Observer la limite entre les 2 milieux



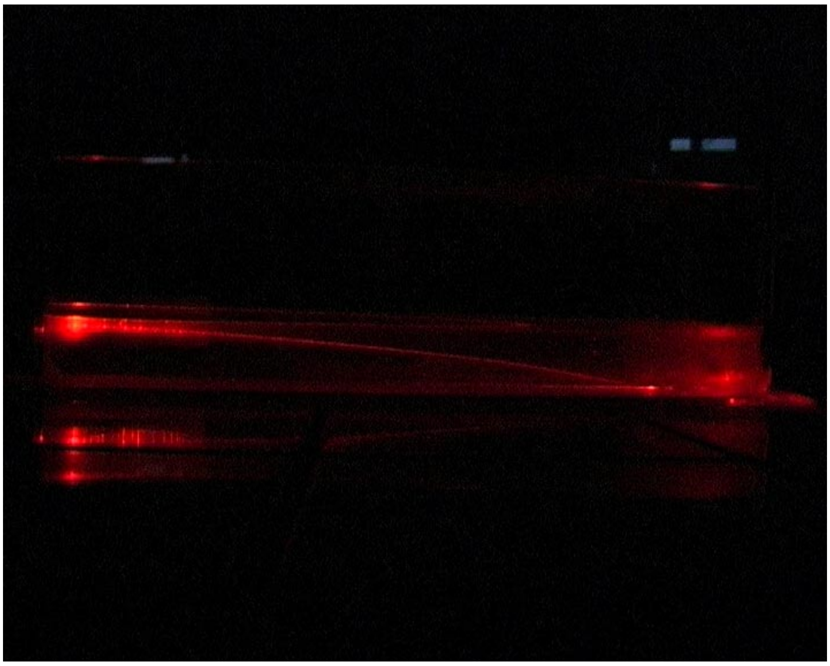
Apparence du poste de travail

- Disposer le laser horizontalement en face de la cuve, au niveau de l'eau saturée. Allumer le laser. Éteindre les lumières et observer le trajet de la lumière dans la cuve.

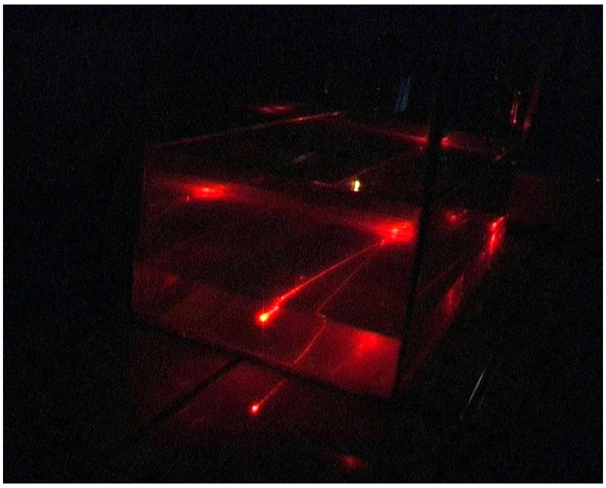
Indications pratiques

- Pour accélérer la dissolution du sucre dans l'eau, placer 1L d'eau sur une plaque chauffante (et élever la température à 25°C) et un agitateur magnétique. Il suffit ensuite d'ajouter le sucre et d'attendre qu'il soit entièrement dissous, puis de recommencer, etc.
- Il est possible d'affiner le pinceau lumineux en plaçant une lentille convergente avant la cuve.

Résultat de l'expérience



La lumière est déviée et n'apparaît plus en ligne droite. Elle emprunte un chemin courbe.



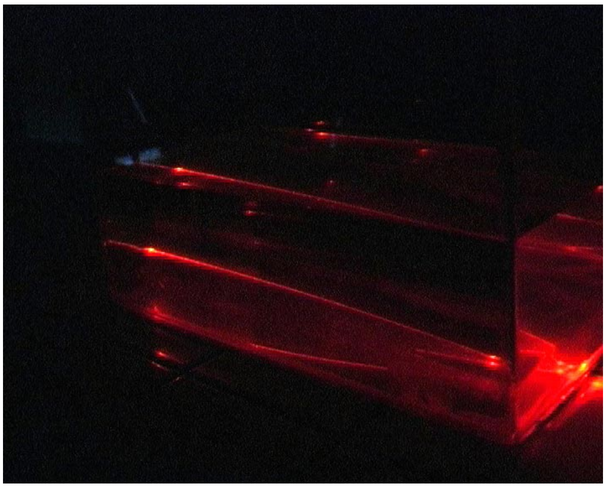


Image de la cuve vue en perspective et qui montre clairement le trajet courbe de la lumière.

Explication du phénomène du mirage

Pourquoi la lumière emprunte t-elle un chemin courbe dans la cuve ?

Analyse de l'expérience

Dans l'eau, la lumière se propage en ligne droite, comme dans tout milieu homogène. La loi de réfraction $n_1 \times \sin(i_1) = n_2 \times \sin(i_2)$ nous indique que la direction de propagation de l'eau évolue en fonction de l'indice de réfraction du milieu traversé. L'eau sucrée de l'expérience a la particularité de proposer cette hétérogénéité. Le sucre plus lourd que l'eau s'est déposé au fond en se mélangeant, créant ainsi des couches très fines d'eau sucrée.

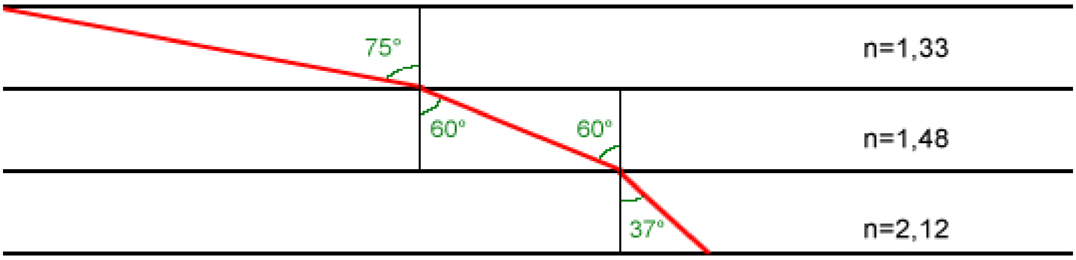


Schéma montrant le phénomène ayant lieu dans le milieu non homogène

Mais ces couches s'étalonnent de haut en bas, les couches du haut ayant une plus faible densité que celles du bas qui sont en majorité composées de sucre. **Comme l'indice de réfraction ne varie pas brutalement d'une valeur à une autre, la déviation du faisceau n'est pas brutale non plus,** c'est pour cela que nous voyons une ligne courbe et non droite.

Le mirage du désert

C'est ce même phénomène qui a lieu dans les déserts : la lumière du soleil est courbée du fait des différences de températures en s'approchant du sol, et donc de la variation de l'indice de réfraction. **En effet, l'air plus chaud dégagé par le sol se répartit de la même manière en micro-strates, créant un gradient d'indice.**

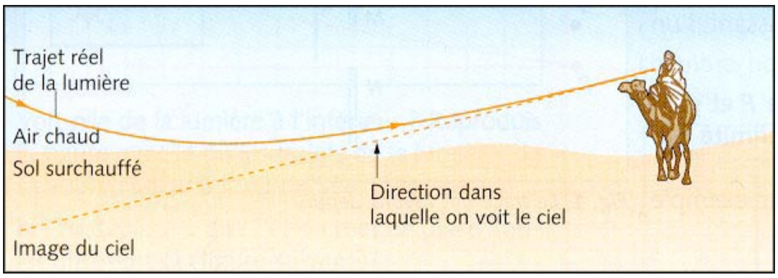


Schéma de la propagation de la lumière dans le désert lors d'un mirage

Ainsi un coin de ciel bleu peut apparaître sur le sol, à quelques centaines de mètres : les plus assoiffées y devineront une oasis, et seront victimes du mirage !

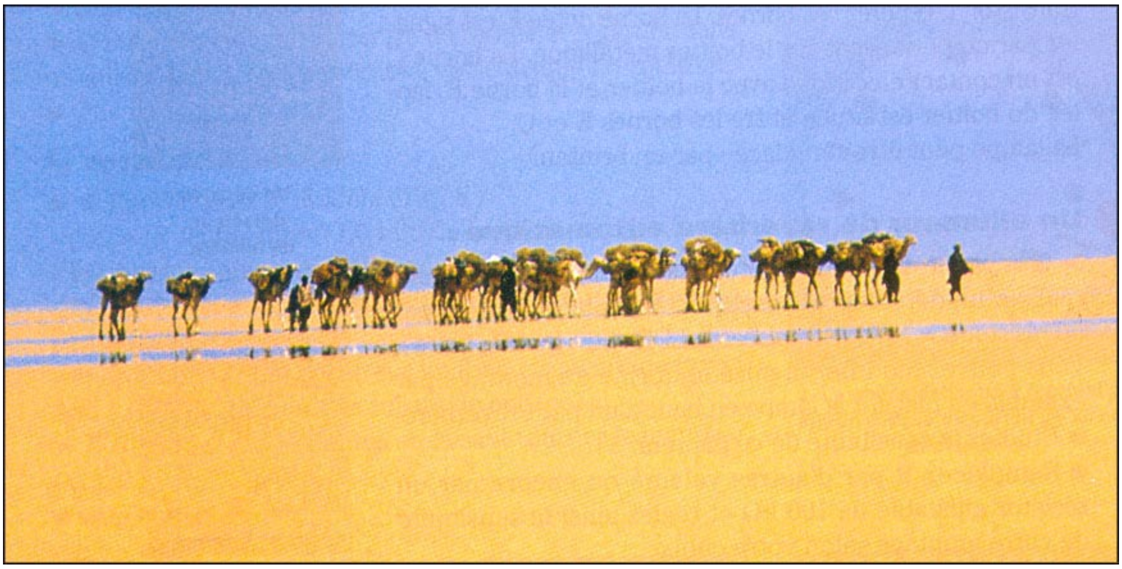


Photo montrant le phénomène du mirage dans le désert

La lumière, dans un milieu non homogène, n'emprunte donc pas la ligne droite. Le chemin le plus court pour aller d'un point A à un point B est une courbe fonction des variations des indices des milieux traversés. Les rayons lumineux répondent à un principe, énoncé par Pierre de Fermat, selon lequel le chemin emprunté par la lumière est celui pour lequel le temps de parcours est minimum.

Le chemin le plus court est donc le plus rapide. Cette loi va nous permettre d'énoncer et de démontrer la loi de Snell-Descartes.

Loi de Descartes

- ou comment sauver le plus rapidement possible une jeune femme de la noyade -

Superman travaillait tranquillement son dernier devoir de Sciences Physique sur les circuits RLC, au balcon du dernier étage de la tour Montparnasse, lorsqu'il entendit un cri aigu d'appel au secours. Une femme. "Au secooouuuuuurs, je me noiiiiie, venez vite me sauver !". Aussitôt Superman enfila son habit de Super Héros et décida de voler au secours de la jeune fille.

Mais un grand problème se posa à lui : comment aller du sommet de l'immeuble jusqu'au fond du lac, sans perdre un seul millionième de seconde ?

Superman décida de réfléchir un peu (eh oui, ça lui arrive !). Le but est de chercher le chemin pour lequel le temps de parcours de A (Superman) à B (la femme qui se noie) est minimum.

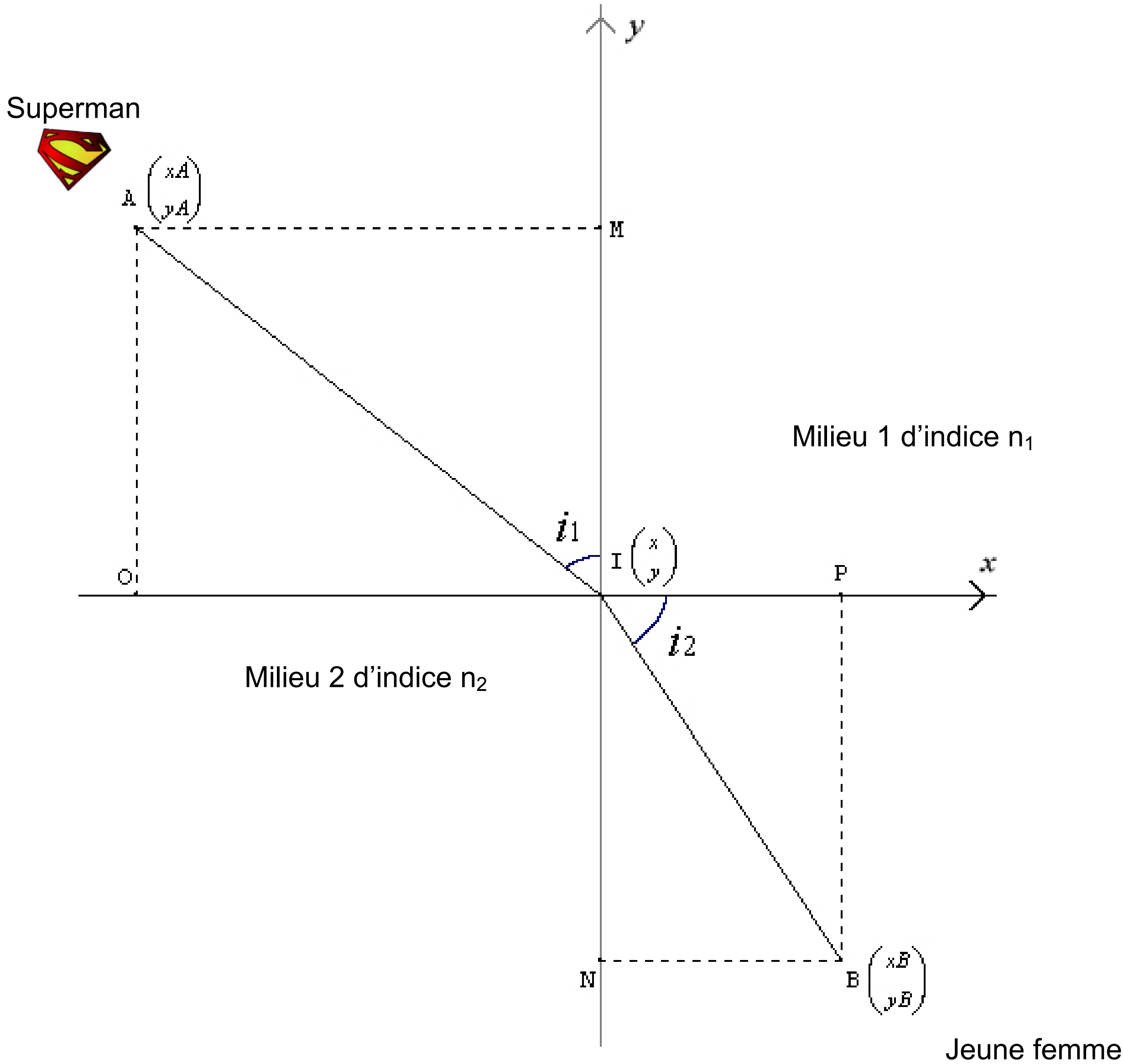


Schéma valable pour le cas $n_1 < n_2$

Quelques données intéressantes

$$AI^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2$$
$$BI^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$$

On pose les vitesses de Superman :

- dans l'air : c (Superman vole à la vitesse de la lumière !)
- dans l'eau : v avec $v = \frac{d}{t}$

On établit les temps de vol en supposant qu'il suit une géodésique :

t_1 : temps de parcours dans l'air : $t_1 = \frac{BI}{c}$

t_2 : temps de parcours dans l'air : $t_2 = \frac{BI}{v}$

t_{AB} : temps mis par Superman pour aller de A à B : $t_{AB} = t_1 + t_2$

$$\rightarrow t_{AB} = \frac{AI}{c} + \frac{BI}{v}$$

$$\rightarrow t_{AB} = \frac{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}}{c} + \frac{\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}}{v}$$

Recherche de $t_{AB\min}$

On cherche l'abscisse x à laquelle notre Héros doit rentrer dans l'eau, de telle sorte que t_{AB} soit minimale. On cherche donc x tel que $\left(\frac{dt_{AB}}{dx}\right) = 0$

$$\frac{dt_{AB}}{dx} = \frac{1}{c} \times \frac{1}{2} (...)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{v} \times \frac{1}{2} (...)^{-\frac{1}{2}} \times 2(x - x_B)$$

$$= \frac{1}{c} \frac{x - x_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}} + \frac{1}{v} \frac{x - x_B}{\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}}$$

$$= \frac{1}{c} \times \frac{AM}{AI} + \frac{1}{v} \times \frac{-BN}{BI}$$

$$= \frac{1}{c} \sin i_1 - \frac{1}{v} \sin i_2$$

Pour $\frac{dt_{AB}}{dx} = 0$

On a $\frac{1}{c} \sin i_1 = \frac{1}{v} \sin i_2$

$$\boxed{\sin i_1 = n \times \sin i_2}$$

Superman sait donc ce qu'il lui reste à faire. Mais malheureusement notre pauvre super héros a mis trop de temps pour faire son calcul : **les pompiers de la ville ont été plus rapides que lui et ont sauvé la jeune femme de la noyade ! Et c'est pour qui le bouche-à-bouche !**

Résultat de la démonstration

Néanmoins Superman pouvait être fier de lui : il venait de redémontrer la célèbre loi attribuée à Descartes ! Cette loi repose comme nous l'avons vu sur le principe de Pierre de Fermat selon lequel la lumière emprunte le chemin pour lequel le temps de parcours est minimum.

En remplaçant la vitesse de Superman c par une autre vitesse v, nous aurions abouti à $n_1 \times \sin(i_1) = n_2 \times \sin(i_2)$.

Conclusion

Après ce travail, il apparaît évident que le chemin *le plus court* ne peut pas être la ligne droite sur toutes les surfaces… et dans tous les milieux.

Sur les solides mathématiques, nous pouvons distinguer trois cas particuliers.

Le premier cas comprendrait les solides développables, comme par exemple le cube et le cylindre. Le chemin le plus court serait effectivement une ligne droite sur le patron. Néanmoins cette ligne droite serait représentée par une courbe lorsque le patron est constitué. Ainsi dans le plan, le plus court chemin est le segment liant les deux points ; dans les 3 dimensions le segment devient courbe, mais reste le chemin le plus court. En effet, sur une surface pleine, une droite liant deux points directement est impossible, car cette droite traverserait le solide.

Le deuxième cas concerne les solides à courbure positive, comme notre terre, sur lesquels nous pouvons appliquer une géométrie qui est cependant non euclidienne. En effet, sur la sphère, qui est l'exemple que nous avons traité, on ne peut déplier et former un patron. Le chemin le plus court ne peut être représenté sur un plan, mais seulement en trois dimensions. Il est appelé grand cercle : c'est un cercle dont le centre est le centre de la sphère.

Le dernier cas concerne les surfaces à courbure négative, tel que la pseudosphère de Lobatchevski, qui comme la sphère est un espace non euclidien.

Le disque de Poincaré est un cas à part, sa géométrie est radicalement différente. Le chemin le plus court est très rarement une ligne droite. Sur le disque de Poincaré, les droites sont courbes du fait de l'augmentation de la pression lorsque l'on s'approche du bord. L'étude de telles surfaces a permis la mise au point par Einstein de la très célèbre théorie de la relativité générale, qui lui valut le prix Nobel de physique en 1921. Il découvrit que les grosses masses courbaient l'espace et donc la lumière. L'espace ne répond donc pas à une géométrie dite euclidienne.

La courbure de la lumière par les masses nous a amenés à travailler sur la lumière, et nous avons montré, à travers la connaissance du principe de Fermat qui dit que la lumière emprunte le chemin pour lequel la durée est minimale, que la lumière ne se propageait pas en ligne droite dans des milieux non homogènes. Nous avons donc pu expliquer le phénomène du mirage, à travers notre expérience, ce qui nous a amenés à démontrer la loi de Descartes liant les directions de propagations de la lumière lorsqu'elle parcourt différents milieux non homogènes.

Nous pourrions conclure et répondre à la question de manière générale : la ligne droite entre deux points est très rarement le chemin le plus court. En effet, il est souvent impossible de tracer une droite sur une surface car nombre d'entre elles ne sont pas planes, plus particulièrement les corps célestes dans l'infiniment grand, et les atomes ou molécules dans l'infiniment petit.

Cependant lorsque nous faisons des mathématiques, nous raisonnons principalement sur des espaces euclidiens. Dans ce cas là, bien sûr, la ligne droite reste le chemin le plus court.

Bibliographie

Voici la liste des ressources dont nous avons disposé pour la réalisation de ce TPE. Nous avons régulièrement au cours de l'année emprunté des ressources aux CRD, selon les conseils de nos professeurs. Cela nous a été d'une grande aide.

Livres, magazines et encyclopédies

- Les aventures d'Anselme Lanturlu – Le géométricon – 1980 –

Cette BD dessinée et écrite par Jean-Pierre Petit est une mine d'or d'informations sur tout ce qui concerne les différentes géométries : euclidiennes et non euclidiennes. Les dessins simples mais réussies clarifient largement l'ensemble déjà cohérent de la BD.

- L'espace et la géométrie – 1908 –
  Henri Poincaré « La science de l'hypothèse »
  Editions flammarion. Pages 88-91

Ce texte nous présente les bases de la géométrie non euclidienne de Poincaré. Il introduit en particulier l'exemple du disque aux rebords infinis, espace à deux dimensions, qui possède des caractéristiques propres et différents de la géométrie habituelle. Très complet et détaillé, il est précis et concis. Il nous a permis d'ouvrir les yeux sur un monde pourtant très abstrait. Une vraie réussite.

- La lumière du laser. Guide d'expériences. – M. Henry – 1987 –

Editions Masson. Pages 54-55

Ce livre intéressant propose de nombreuses idées d'utilisation du laser pour la réalisation des expériences avec la lumière.

- Physique-Chimie. Seconde. (1998)

Editions Nathan. Page 160

Le livre de cours de seconde propose une explication du phénomène du mirage ainsi qu'une image.

- Sciences et vie – Juillet 2002 –

Ce Sciences et vie dédié aux mondes parallèles a permis de mieux comprendre les différents phénomènes d'univers à plusieurs dimensions.

- Tangente – Août Septembre 2000 –

Tout un article sur la relativité et les géométries non euclidiennes fut très instructif : relativité, temps, espace et matière.

Sites internet

- www.mathcurve.com - Site de Robert Ferréol -

Ceci est un site qui nous a fourni une aide précieuse afin de trouver les formules paramétrées pour l'hélice cylindrique. Ce site est d'autre part très intéressant par l'application des formules dans des cas spéciaux, accompagnés toujours d'une photographie ou d'un schéma clair et joli. Les webmasters avec lesquels nous sommes rentrés en contact sont de plus très sympathiques et toujours prêts à répondre à nos questions. Merci donc à eux !

- http://www.cabri.net/cabrijava/index-f.html - Site de Cabri –

Ce site propose des explications et des schémas très réussis sur la pseudosphère.

Synthèse personnelle de Matthieu Aubry

Synthèse personnelle de Matthieu

Cette année de TPE fut très enrichissante, sur de nombreux points. Le sujet qui fut long à trouver en début d'année, à cause de l'accident de Pascal, s'est révélé passionnant et d'une grande richesse. En cela, les TPE sont une structure privilégiée. Elle permet en effet de concilier autonomie, recherche documentaire et mise en relation avec des personnes spécialisées.

Nous avons longtemps hésité avec Pascal sur le choix du sujet en début d'année. En effet nous hésitions sur entre l'aérodynamisme et le chemin le plus court. Cette longue hésitation nous permit de nous assurer du réel intérêt que nous portions à la problématique choisie.

Les TPE s'avérèrent être une formidable entreprise où nous dûmes savamment mêler organisation, recherche, intelligence et savoir-faire. Notre volonté de fournir un travail multidisciplinaire nous amena à travailler principalement sur les maths (la première partie), la physique (la seconde partie), et à réaliser une expérience sur le mirage, qui nous prit beaucoup de temps de préparation. De plus il a été nécessaire, du fait du retard pris à cause de l'accident de Pascal, et de la complexité de certaines rubriques, de travailler le soir à l'internat, en groupe. Nous nous sommes alors basés sur les recherches effectuées en tout début d'année qu'il a éventuellement fallu compléter, ainsi que sur les conseils de nos professeurs ressources.

Sur ce point, il est important de signaler que les professeurs étaient très présents et ont pu constamment nous aider à trouver une solution à nos problèmes. M. Gaud notamment nous a aidé, entre autres, pour les démonstrations des chemins les plus courts sur la sphère et le cylindre.

L'autonomie nécessaire et l'ouverture indispensable pour le travail en équipe sont des qualités que nous avons dues développer, avec grand plaisir. Nous nous sommes grandement investis tous les deux dans le projet et avons pu le mener à bien avec un dossier final qui nous satisfait grandement.

Matthieu's personal synthesis

This TPE year has brought a lot of knowledge, on numerous levels. It took us a long time to find the subject at the beginning of the year, due to Pascal's accident. It turned out to be a very exciting and thrilling experience. Indeed, it enabled to reconcile independence, documentary research and getting in touch with specialized people.

We hesitated a long time with Pascal about the choice of the subject. Indeed we didn't know what to choose between aerodynamics and "the shortest path". This long hesitation has enabled us to make sure that we were very interested about the problematic.

TPE turned out to be a formidable experience where we had to cleverly mix intelligence, organisation, and research. We felt the need to study maths (the first part), physics (the second part), and an experience about a mirage that took us a lot of time to prepare. On top of that because of Pascal's accident, it was necessary to work during the evenings, as a group. We based our work on the research we made at the beginning of the year which had to be completed, and on our teachers' advices.

On this point, it's important to point out that teachers have been very present and have always been able to help us find solutions to our problems. Mr Gaud helped us for the demonstrations on the sphere and the cylinder.

The necessary independence and the essential comprehension team work are qualities that we had to develop, with great pleasure. We've both invested in the project and we brought it to a successful solution, with a result that satisfied us largely.

Synthèse personnelle de Pascal Blome

Synthèse personnelle de Pascal

Durant ce semestre, les TPE ont été pour moi **une expérience à nouveau très enrichissante.** Notre sujet sur le chemin le plus court, m'a permis de découvrir de nombreux domaines très intéressants, auxquels je n'aurais pas pensé accéder en début d'année. Hésitant entre plusieurs sujets à ce moment-là, nous avons passé un temps assez long pour le choisir définitivement ; mais cela nous a alors permis d'être sûrs quant à nos intérêts envers celui-ci. Ceux-ci se tournèrent principalement vers **les mathématiques et la physique** ainsi que, et non en dernier, vers **leur application concrète.** Nous avons donc, dés le début, décidé de réaliser une expérience et choisi un sujet qui le permettait.

Notre travail a été **très formatif tant au niveau de l'organisation en petit groupe, qu'en l'apprentissage lui-même** de notre sujet. Tout au long du temps consacré aux TPE, nous nous sommes sans cesse informés à droite et à gauche pour avancer dans nos recherches. **Les professeurs qui nous encadraient étaient très présents** et se sont montrés capables de répondre à nos nombreuses questions. Nous avons alors pu avancer assez rapidement et traiter toutes les parties de notre TPE, même les plus compliquées que nous n'aurions pas été en mesure de réaliser en toute autonomie.

Matthieu et moi avons généralement travaillé ensemble, pendant les séquences TPE comme en dehors ; nous avons donc vu toutes les parties autant l'un que l'autre et **nous nous sommes aidés mutuellement pour la compréhension des démonstrations et des documents** (cf. Bibliographie). Cependant nous avons naturellement dû partager la rédaction et réalisation (images, mise en forme, etc.) des différentes parties afin d'avancer rapidement. Ce travail à été réalisé en majeure partie le week-end où nous ne pouvions nous voir.

Pour finir je dirais que le travail réalisé cette année m'a vraiment passionné, tout comme Matthieu**, nous nous sommes réellement investis dans ce projet et avons beaucoup appris.** De plus la réflexion mathématique que nous avons portée à notre travail nous aidera certainement dans nos futures études, tout comme l'organisation du travail et la bonne entente en groupe.

Personelle Synthese von Pascal

Während dieses Semesters sind die TPE (Persönliche Umrahmte Arbeiten) für mich **erneut eine sehr bereichernde Erfahrung gewesen**. Unser Thema über den kürzesten Weg hat mir erlaubt zahlreiche Bereiche zu entdecken, die ich am Jahresanfang nicht gedacht hätte zu erreichen. An diesem Moment noch unschlüssig über unser Thema haben wir eine ziemlich lange Zeit verbracht es endgültig zu wählen ; dieses hat uns allerdings ermöglicht unser Interesse dem gegenüber sicher zu sein. Diese richteten sich hauptsächlich **nach der Mathematik und der Physik**, wie ebenfalls, und nicht letztens, nach **ihrer konkreten Anwendung**. Wir haben also von Anfang an beschlossen ein Experiment durchzuführen und ein Thema zu wählen, das dies ermöglichte.

Unsere Arbeit ist **sehr belehrend gewesen, im Bereich der Organisation, genauso wie das lernen des Themas selbst**. Die ganze uns zur Verfügung gestellten Zeit über, haben wir uns andauernd links uns rechts informiert um in unseren Nachforschungen weiter zu kommen. **Die Lehrer die uns umrahmt haben waren sehr gegenwärtig** und waren imstande unseren zahlreichen Fragen nachzukommen. Wir konnten also recht schnell vorangehen und alle Etappen unserer TPE ansprechen, sogar die Kompliziertesten die wir nicht fähig gewesen wären in voller Autonomie auszuführen.

Matthieu und ich haben meistens zusammen gearbeitet, während der TPE Stunden wie außerhalb ; wir haben also alle Etappen ebensoviel behandelt, und **sind uns gegenseitig zur Hilfe gekommen um Beweisführungen und Dokumente zu verstehen** (siehe Bibliographie). Dagegen mussten wir natürlich die Abfassung und die Realisation (Bilder, Layout, usw.) der verschiedenen Abschnitte unter uns trennen um zügig voranzukommen. Diese Arbeit haben wir größtenteils am Wochenende getan, wo wir uns nicht sehen konnten.

Als Abschluss würde ich sagen, dass die diesjährig durchgeführte Arbeit mich wirklich begeistert hat, ebenso wie Matthieu**, wir haben uns wirklich in dieses Projekt impliziert und haben sehr viel gelernt.** Zudem wird die mathematische Denkweise die wir unserer Arbeit zugewendet haben uns sicherlich in weiteren Studien helfen, ebenso wie die Organisation der Arbeit und die gute Zusammenarbeit.

Carnet de Bord

Nous avons rempli le carnet de bord tout au long de l'année, en notant après chaque séance le travail effectué, les difficultés rencontrées, etc. Cela nous a permis de bien nous organiser et de rester dans le planning prévu initialement, malgré les 2 semaines d'absence de Pascal.

Séance n°1 du 23 septembre 2002

Première séance TPE de l'année : la présentation en salle multimédia se fait rapidement car nous connaissons tous leur fonctionnement. Nous recevons les dossiers de présentation pour l'année 2002-2003, et première surprise : les thèmes proposés au niveau terminale pour cette année sont au nombre de 5, de quoi trouver un sujet passionnant. Cependant notre attention reste dés le début sur le thème 'Espace et Mouvements' qui paraît le mieux répondre à nos attentes car nous recherchons un sujet correspondant à nos souhaits et intérêts, c'est-à-dire portant sur la **physique et les mathématiques**. 'Le chemin le plus court', 'l'aérodynamisme' et 'la lumière' sont les thèmes qui nous intéressent tout particulièrement et nous profitons de la dernière demi-heure pour nous en informer en parlant avec M. Gaud, M. Meyer et Mme Brochet. Les possibilités des sujets sont vastes et nous connaissons nos attentes précises envers le projet, l'année s'annonce donc plutôt bien !

Séance n°2 du 7 octobre 2002

Pascal est absent pour cause d'accident

Matthieu est seul à cette séance, mais le travail doit continuer. A partir des sujets retenus lors de la séance précédente il recherche un sujet pertinent sur le thème espace et mouvements qui correspond à nos intérêts. Nous avions de nombreuses idées de sujets mêlant physique, mathématiques et SVT, mais le choix semble se porter de plus en plus vers **'le chemin le plus court sur différents surfaces'**. Nous hésitons néanmoins encore avec l'aérodynamisme, mais les professeurs nous ont expliqué que ce sujet était trop complexe à traiter en profondeur, à cause de nombreuses formules mathématiques dépassant notre niveau actuel de terminale.

Notre intérêt est de réaliser un travail concret et complet et non pas de ne faire que traiter le sujet en superficie. Nous devons rapidement nous mettre d'accord à propos du sujet et trouver si possible une problématique.

Séance n°3 du 14 octobre 2002

Pascal est toujours absent, mais il va revenir demain

Le travail continue encore une fois sans Pascal, mais nous avons discuté ensemble à propos du sujet : notre intérêt se porte toujours aux deux sujets retenus, l'aérodynamisme et le chemin le plus court, mais nous décidons de nous renseigner plus en profondeur avant de choisir. Pour nous aider dans notre choix nous cherchons des **expériences possibles à réaliser** pour chacun des sujets car nous souhaitons **réaliser une application concrète de notre travail pour en montrer l'utilité**. Nous devons choisir définitivement le sujet pour la séance suivante, car le temps devient pressant et nous ne voulons pas accumuler du retard dés le début.

Séance n°4 du 4 novembre 2002

Nous sommes enfin au clair et avons choisi définitivement notre sujet : **« le chemin le plus court sur différentes surfaces et dans différents milieux »**. La problématique en résulte logiquement : **« la ligne droite est-elle toujours le chemin le plus court sur différentes surfaces ainsi que dans différents milieux ? »**. Notre travail comportera donc deux parties, la première plus orientée sur les mathématiques et la deuxième orientée vers la physique-chimie. Nous envisageons de réaliser des expériences et nous nous renseignons auprès des professeurs sur des idées éventuelles et réalisables. A côté de cela nous réfléchissons aux sous-parties ainsi qu'au contenu (plan détaillé), et nous lisons des extraits d'œuvres de mathématique et de physique sur la 4ème dimension pour nous informer sur la géométrie non-euclidienne. Nous devons affiner le plan avant la séance suivante pour rattraper le retard dû à l'absence de Pascal.

Séance n°5 du 18 novembre 2002

Nous commençons notre travail sur le chemin le plus court sur **le cylindre** et cherchons la formule de l'hélice cylindrique, plus court chemin reliant deux points sur le cylindre. En même temps nous nous formons sur le logiciel de modélisation mathématique **'Géospace'** avec l'aide de M. Gaud. Nous apprenons beaucoup de choses sur la mathématique euclidienne, mais le travail se présente long et laborieux. Nous devons régulièrement nous faire aider par M. Gaud qui nous fait des cours sur ce sujet. Le plan détaillé est rédigé et nous discutons des expériences réalisables sur la partie physique avec Mme Brochet (démonstration de la loi de Descartes avec la lumière). Il se pose alors le problème des expériences que nous pouvons réaliser et quels travaux nous pouvons et sommes capables d'effectuer sur les logiciels 'Géospace' et 'Géoplan' afin de **démontrer les théorèmes étudiés**. Nous devons réfléchir à ces question et continuer le travail car le projet est plus compliqué que nous nous y attendions.

Séance n°6 du 25 novembre 2002

Nous travaillons de nouveau avec M. Gaud pour chercher et démontrer les formules du chemin le plus court sur le cylindre. Nous réussissons finalement après deux heures de travail avec M. Gaud à tracer **l'hélice cylindrique** sur Géospace. En même temps nous commençons la rédaction de cette partie déjà traitée lors de la séance précédente. Nous avons également trouvé une expérience qui nous paraît très intéressante : **le mirage**. Ce phénomène reflète la faculté de la lumière à suivre le chemin le plus court en temps. Nous nous informons alors sur le matériel nécessaire ainsi que la quantité pour réaliser l'expérience. Il se pose plusieurs problèmes à résoudre : comment tracer une hélice conique (partie suivante), car il n'y a pas d'équation paramétrée disponible. Nous devons finir la modélisation Géospace et rechercher les formules nécessaires à cela.

Séance n°7 du 2 décembre 2002

Nous nous mettons d'accord à propos du support final qui sera un **site internet**, accompagné bien sûr d'un **dossier papier** imprimé pour la présentation au jury. Ceci se présente comme support le plus adapté à notre travail d'une part à cause de notre intérêt à l'informatique, d'autre part puisque nous réalisons notre travail directement sur le support informatique. Nous devons alors nous mettre d'accord sur la charte graphique que nous allons choisir pour une présentation claire et simple. A côté de cela nous trions les informations récupérées lors de précédentes recherches de documents sur Internet et dans des livres et magazines de mathématique et de physique sur le chemin le plus court. Nous décidons également de restreindre la partie mathématique en supprimant la partie sur l'hypersphère, car cela prendrait trop de temps et serait trop difficile à réaliser. L'expérience devient plus concrète après des discussions avec plusieurs professeurs de physique-chimie et nous nous y préparons. L'évaluation intermédiaire approche et nous commençons à nous y préparer en continuant à remplir le plan détaillé de notre TPE ainsi qu'en rédigeant les **démonstrations des calculs** du chemin le plus court sur le cylindre.

Séance n°8 du 9 décembre 2002 : évaluation intermédiaire

Nous sommes arrivés à la moitié du temps de nos TPE et l'évaluation intermédiaire s'annonce pour aujourd'hui. Nous sommes préparés et savons ce que nous avons à dire à propos de notre travail en TPE, les derniers documents sont alors imprimés. En attendant notre tour, nous travaillons sur les rédactions des parties cylindre et sur l'expérience.

Séance n°10 du 6 janvier 2003

Après la première partie sur le cylindre et après avoir repoussé le cône à plus tard, nous commençons aujourd'hui la partie sur **la sphère**. Le problème posé reste le même : quel est le chemin le plus court qui relie deux points sur cette surface ? Pour simplifier le problème nous supposons les deux points à la même latitude. Le chemin le plus court n'est alors pas la parallèle à l'équateur, mais bien sûr **le grand cercle**. Reste maintenant à le démontrer. Nous passons la première heure avec l'incontournable M. Gaud qui nous aide à démontrer cette vérité, car ce n'est pas le plus simple des théorèmes. A la fin des deux heures nous avons enfin tout compris et rédigé les formules sur l'ordinateur. Il reste maintenant à faire des schémas sous Géospace pour illustrer et rendre compréhensible notre travail. **Nous pensons également refaire les calculs pour deux villes à la même latitude (Poitiers et Seattle).** Nous espérons trouver une différence notable entre les deux trajets envisagés (parallèle et équateur). Cela nous a permis de réviser **notre vocabulaire géographique** et les quelques notions fondamentales. A côté de cela nous parlons également avec nos professeurs de physique à propos de la démonstration de la loi de Descartes que nous allons réaliser en dehors du temps consacré aux TPE par l'établissement.

Séance n°11 du 20 janvier 2003

Le travail planifié lors de la séance précédente est terminé **après de nombreuses heures de travail à l'internat et le week-end à la maison.** Nous avons alors décidé de consacrer cette séance à la **réalisation de notre expérience** après l'avoir préparée au cours de la semaine précédente. Après avoir testé la capacité de l'eau à dissoudre du sucre pour obtenir une solution saturée et ayant préparé celle-ci, nous sommes enfin fin prêts pour réaliser l'expérience. Nous avons encore discuté avec des professeurs de physique-chimie pour être sûrs du protocole à suivre. Finalement nous avons réussi après quatre heures d'essais et de préparation. Le rayon lumineux du laser montra une courbe nette ! Maintenant il fallait photographier le bac. Là se posa un problème majeur. **L'appareil numérique, pourtant récent, à notre disposition n'était pas assez sensible pour photographier dans l'obscurité totale.** Comment alors enregistrer une image de cette expérience ? Nous avons alors pensé aux tout récents caméscopes numériques semi professionnels dont le lycée avait fait l'acquisition depuis peu. Et celui-ci s'est alors montré capable de prendre des photos nettes du rayon laser. Pour la séance précédente nous avions alors à acquérir les vidéos de l'expérience et rédiger un protocole détaillé retraçant toutes les manipulations, les causes et les conclusions de cette expérience.

Séance n°12 du 27 janvier 2003

C'est la dernière séance avant la remise des dossiers. Nous sommes très avancés et il ne nous reste plus que la partie sur la géométrie non-euclidienne à finir. Nous nous étions déjà informés sur cette partie lors des premières séances et reprenons les documents consultés, ainsi qu'un texte de Henri Poincaré sur la géométrie non-euclidienne que M. Gaud nous a fait parvenir suite à notre demande. Nous effectuons également une recherche Internet pour télécharger un logiciel permettant de visualiser le monde imaginé par Poincaré. Celui-ci nous permettra d'illustrer cette dernière partie sur la géométrie non euclidienne, **vision un peu philosophique d'une partie des mathématiques**. **Lors de cette séance nous organisons de plus le travail qui reste à faire et répartissons les tâches.** Il reste deux semaines pour tout finir. Courage !

Semaine du 3 février 2003

Afin de finir le dossier sur le support informatique, nous avons passé beaucoup de temps à mettre en forme, corriger quelques erreurs, tout revoir, sans oublier **la rédaction des synthèses personnelles et leurs traductions en anglais et allemand.**

Mercredi 12 février 2003 : remise des dossiers

Mardi 11 mars 2003 : évaluation finale