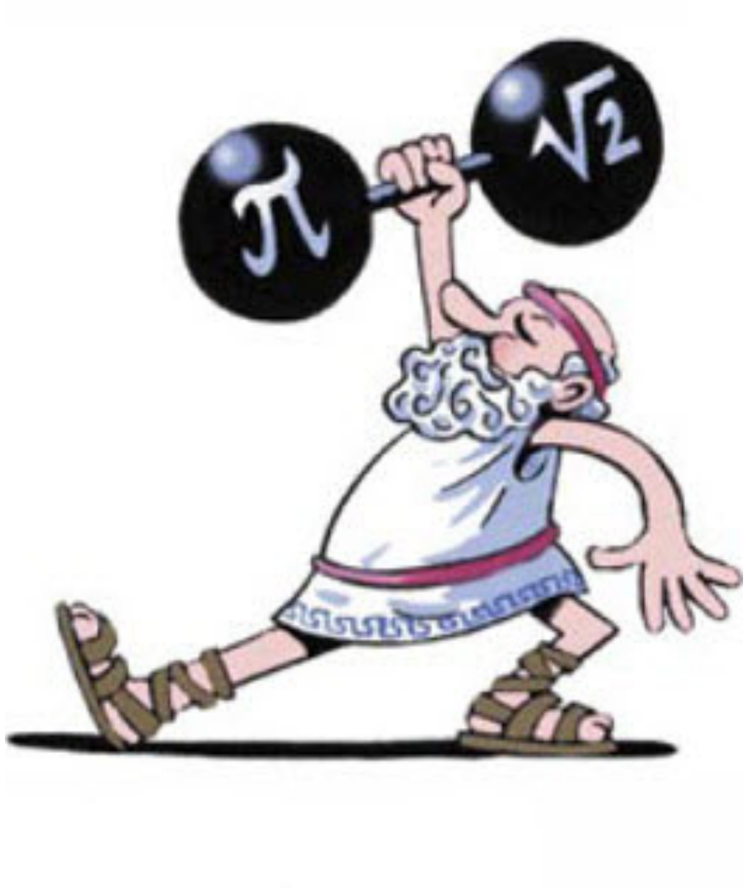
Travail de maturité

Novembre 2011

Les secrets de Π et √2

Avec



Présenté par Samuel Peterer

5F Art-espagnol, Collège de l'Abbaye de St-Maurice

Professeur accompagnant : Pierre Frachebourg

Résumé

Si nous retraçons l'histoire des mathématiques, nous nous apercevons qu'il existe trois nombres dont la nature a frappé et fasciné nos chercheurs. Ce trio est composé du nombre d'or φ, du nombre pi écrit π et du nombre racine carrée de deux, abrégé √2. Un grand nombre de personnes a déjà entendu parler de ces deux légendes π et √2, mais les connaissent-elles vraiment ? Elles ne savent pas que ces deux nombres sont plus coriaces à comprendre qu'ils en ont l'air.

Le but de ce travail consiste donc à découvrir pourquoi il est si compliqué de saisir la réelle nature de π et √2. Cela est principalement dû à l'irrationalité de ces deux nombres, mais aussi pour de nombreuses autres raisons que nous aurons l'occasion d'étudier.

Ce travail ne se résume pas seulement à la documentation et à la rédaction. Nous profitons aussi d'une aide supplémentaire qui nous permet d'animer les recherches. Nous bénéficions de l'appui du logiciel « Cabri-Géomètre II Plus » qui est un logiciel de modélisation de figures géométriques. Celui-là nous donne la possibilité de « montrer », de donner une image visuelle de l'objet traité et ainsi nous permettre de mieux comprendre les faces cachées de ces deux nombres. Par exemple, nous aurons l'opportunité de construire un rectangle d'or.

De ce fait, il est conseillé de télécharger et d'installer « Cabri-Géomètre II Plus » sur le lien suivant :

http://www.cabri.com/fr/telecharger-cabri-2-plus.html

Afin de visualiser les figures, il suffit de cliquer sur l'image ou sur « Figure ». Pour se déplacer dans la figure, il faut garder le bouton « ctrl » enfoncé ou « cmd » suivant les ordinateurs et garder le clic droit enfoncé.

De plus, afin d'animer les figures, déplacez le point en forme de O dans les différentes directions possibles lorsque celui-ci est présent.

Table des matières

I. Introduction

La curiosité a toujours fait partie de la nature des êtres humains. La soif de savoir et de découvertes les pousse à se dédier entièrement à leurs domaines de recherches et de fouiller dans les secrets de la nature. Le nombre de ces mystères découverts augmente de jour en jour. Cependant, certains demeurent toujours enfouis profondément.

Lors de ce travail, nous révèlerons plusieurs secrets sur π et $\sqrt{2}$. Evidemment, nous ne les montrerons pas « tous », car certains dépassent le cadre de notre présentation. Mais, nous apercevrons que ces deux nombres dissimulent encore aujourd'hui la totalité de leurs décimales, étant donné qu'elles sont infinies.

D'une part, nous retracerons leurs histoires – dont certaines aboutiront à la mort de nombreux innocents – les décrypterons, les comparerons et les assemblerons afin de découvrir certains de leurs mystères et de leurs secrets.

D'autre part, nous étudierons la nature de ces deux nombres avec les notions d'irrationalité et de transcendance. Par la suite, quelques vieilles énigmes de l'Antiquité referont surface, suivis de quelques autres problématiques ou découvertes.

II. π

1. Définition

En géométrie, π est le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre. Effectivement, si nous prenons un cercle de diamètre 1, le périmètre sera de 3,14…, car le rapport des deux sera égal à 3,14… Le résultat sera le même, si nous augmentons ou diminuons la valeur du diamètre ou du périmètre.

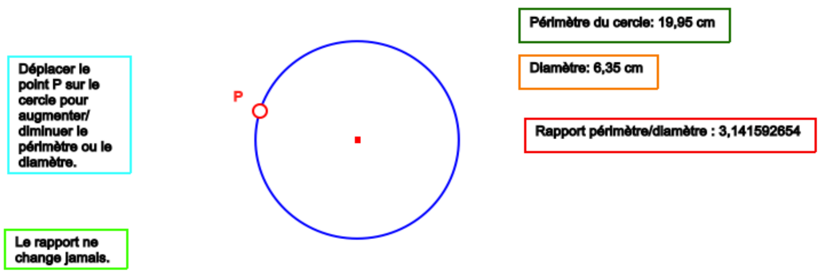


Figure 1

Ici, nous voyons plus clairement la présence de π avec le périmètre de 31,42… cm étant donné qu'il est multiplié par son diamètre de 10 cm.

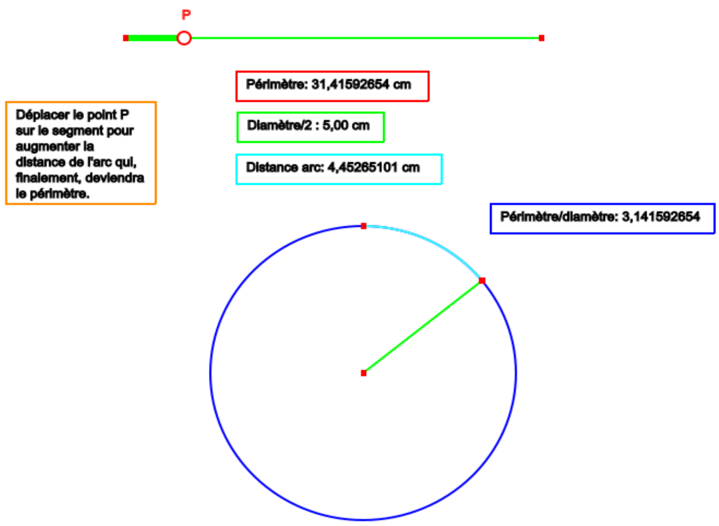


Figure 2

2. Histoire

Les débuts de π remontent aux années -1900 durant le règne des Babyloniens. On pense qu'ils sont les premiers à avoir donné une valeur approchée pour ce nombre: 3 + 1/8 = 3,125. Les égyptiens, par la suite, en -1600, trouvent la valeur de 3,160. Puis, au tour des grecs Archimède et Ptolémée d'en améliorer l'approximation : Archimède affirma, en -250, que π = 3,14185 et Ptolémée, par la fraction 377/120, rapprocha la valeur jusqu'à 3,1416 en 150 après J.C. Quant aux Chinois et aux Arabes, Tsu Chung Chih découvrit le rapport : 355/113 qui vaut 3,141592 en l'an 480 et Al Khwarizmi apporta une nouvelle expression de π : 22/7= 3,1428. Ainsi de suite, des nouveautés apparurent au fil du temps.

Nous voyons que, tout le long de l'histoire des mathématiques, l'homme a tenté de chercher et de donner une valeur exacte à ce nombre, ce qui reste impossible même de nos jours. Cependant, nous avons réussi à augmenter le nombre des décimales de π jusqu'à plus de 1241 milliards et les décimales continuent à s'étendre chaque jour. Tout ce processus se fit, comme nous venons de l'expliquer, en passant par toutes sortes de lieux et de mathématiciens provenant du monde entier. Le nombre π est même reconnaissable dans la Bible, depuis -550, en valant 3. Chaque génération apporta au bilan quelques décimales en plus, un résultat plus approximatif ou même un nouveau moyen de le calculer.

Beaucoup ne comprirent pas pourquoi la valeur exacte n'apparaissait jamais. Ceci, car il leur manquait certains éléments essentiels à la compréhension du sujet, par exemple : l'irrationalité et la transcendance. On ne peut saisir π que si la connaissance de ces deux domaines est acquise. L'explication suivra le long de cette présentation.

Par ailleurs, on utilise π non pas seulement dans l'arithmétique et la géométrie comme nous le connaissons, mais aussi dans plusieurs vastes domaines variés tels que l'algèbre, l'analyse, les probabilités, les statistiques et la physique.

III. √2

1. Définition

La racine carrée de 2 est donc le deuxième nombre mystérieux des mathématiques. Par définition, c'est l'unique nombre réel positif multiplié par lui-même qui donne 2 : $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

Le moyen le plus simple de découvrir √2 est de construire un triangle rectangle de côtés 1 et donc l'hypoténuse aura comme valeur √2 par le théorème de Pythagore : $1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$. Autrement, il suffit de prendre un carré d'aire égale à 2 et donc son côté sera égal à √2.

Celui-ci est irrationnel. Un nombre est, par définition, rationnel s'il est le rapport de deux nombres entiers tels que a/b.

On ne peut pas construire le carré vu plus haut pour deux raisons : on ne connaît pas la valeur exacte de √2, car on ne peut calculer que des approximations des nombres irrationnels et, deuxièment, notre logiciel de modélisation n'utilise que des nombres rationnels, donc des valeurs à un nombre limité de décimales s'il y en a. De ce fait, les nombres irrationnels ne sont pas constructibles. La figure suivante le montre.

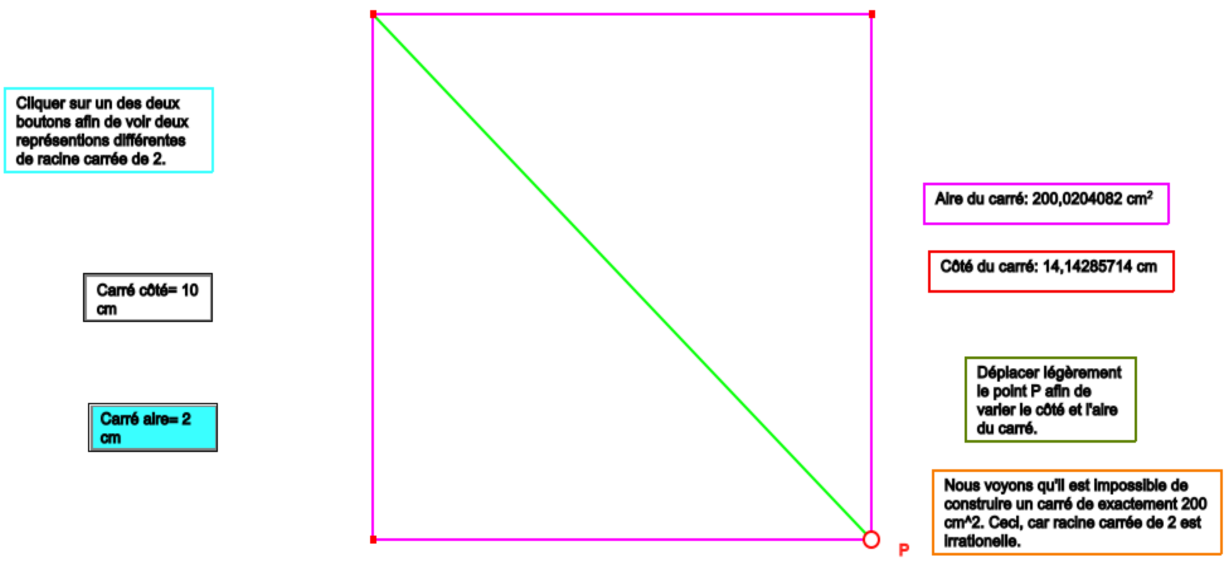


Figure 3

√2 est aussi le résultat du rapport de la diagonale et du côté d'un carré. Ce résultat ne change pas même si les longueurs de la diagonale ou du côté de ce carré sont modifiées.

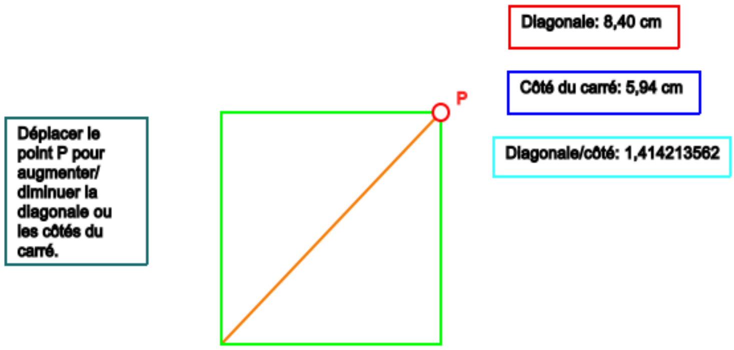
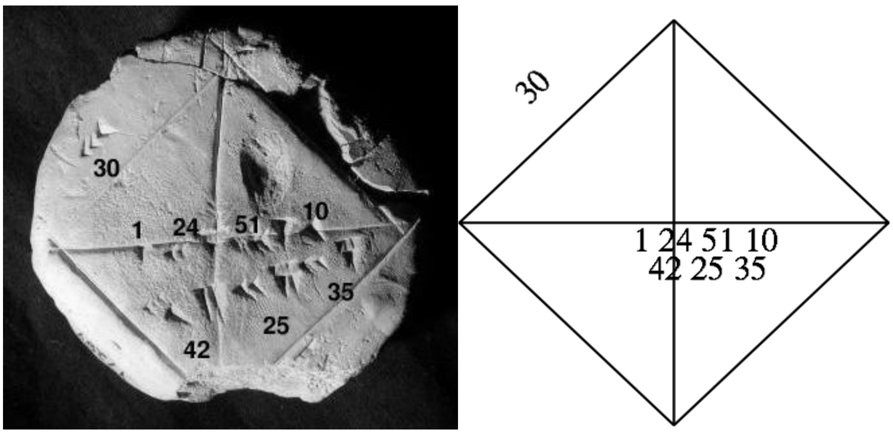


Figure 4

2. Origine

Son origine remonte aux Babyloniens entre 1900 et 1600 av. J.C. d'où l'on a retrouvé une petite tablette sur laquelle furent gravés un carré et sa diagonale. Une série de chiffres et de nombres est gravée sur celle-ci : 1 24 51 10 et en dessous : 42 25 35. Que représentent-ils ?



La tablette[1] et un croquis[2] de celle-ci.

[1] Trouvé sur http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Ybc7289-bw.jpg
[2] Trouvé sur http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:YBC_7289_sketch.svg

Les Babyloniens calculaient avec le système sexagésimal. Le principe de ce système est de numéroter les nombres avec la base 60. Donc, pour la première série de nombres, on les interprète ainsi : $1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$ soit 30547/21600 ce qui donne : 1,41421963. La deuxième série se traduit par le moyen suivant : $42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2}$ soit 30547/720 qui égale à 42,42638889.

Pourquoi ces résultats ? Nous remarquons que le nombre 30 est également présent. Il s'agit du côté du carré. Alors, si on divise le résultat de 30547/720, qui est la valeur de la diagonale, par 30, nous obtenons 30547/21600. Ce que nous pouvons remarquer d'impressionnant est la précision des Babyloniens. √2 vaut approximativement 1,414213562 et les Babyloniens avaient trouvé 1,41421963 pour le rapport diagonale/côté du carré. Les décimales justes sont au niveau du millionième, c'est-à-dire six décimales près.

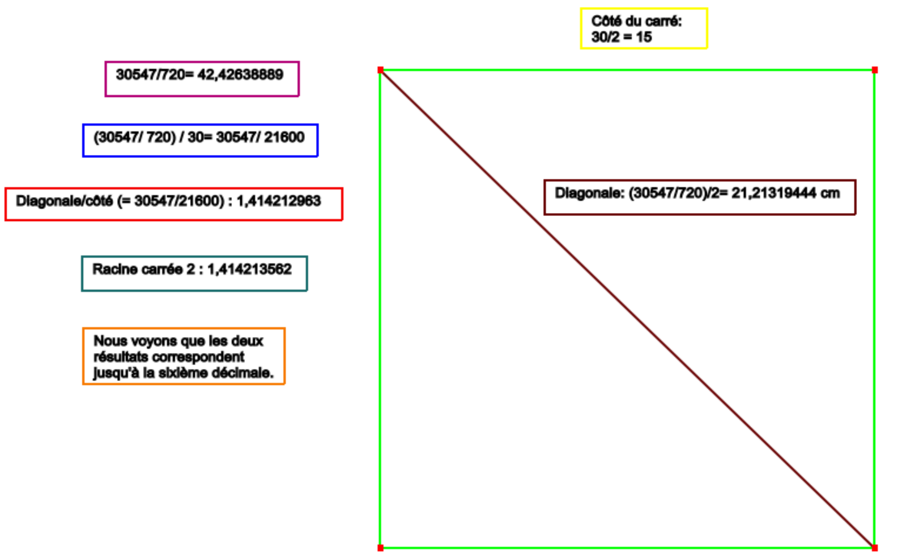


Figure 5

Les découvertes suivantes de ce nombre se firent par les grecs et, par la suite, par les mathématiciens modernes. Les grecs ont, par ailleurs, montré que la racine carrée de 2 était irrationnelle. Ce nombre fut étudié et utilisé en géométrie et en algèbre, mais aussi en musique, en électricité et en photographie. Etonnamment, nous pouvons trouver √2 tout simplement dans le rapport longueur/largeur d'une feuille de papier de format international (ISO 216), dont nous verrons la construction par la suite, ou, aussi, dans les facteurs d'agrandissement de feuilles donnés par les photocopieuses. Cela permet d'agrandir ou de réduire les formats de papier. Ces facteurs sont 50%, 71%, 141% et 200%. Nous remarquons que si 50 est multiplié par √2, le résultat sera approximativement 71 et 200 est le résultat approximatif de la multiplication de 141 et de √2.

Donc, √2 est présent non seulement dans les mathématiques, mais aussi dans certaines utilisations de notre vie quotidienne.

L'apparition de ce nombre ne fut pas récompensée. Au contraire, elle conduisit à la crise de l'irrationalité ou l'incommensurabilité. En effet, elle mit en doute toute la théorie des pythagoriciens : ils pensaient que seul les nombres entiers et positifs existaient.

IV. Crise de l'irrationalité

1. Définition : Rationalité/Irrationalité

Comme dit précédemment, √2 est un irrationnel, tout comme π, c'est-à-dire un nombre ne pouvant être le rapport de deux nombres entiers tels que a/b.

Chez les Grecs, un nombre est dit incommensurable s'il est irrationnel.

2. L'incompréhensible

L'irrationalité fut utilisée d'abord, fort longtemps, par les indiens entre 800 et 500 avant J.C. Il y a plusieurs théories concernant l'apparition de l'incommensurabilité. Certains pensent qu'elle fut exposée par un pythagoricien nommé Hippase de Métaponte. Celui-ci aurait démontré la construction du pentagone régulier. La découverte de l'incommensurabilité lui fut attribuée soit en calculant le rapport de la diagonale et du côté de son pentagone, dont le résultat vaut curieusement 1,618… le nombre d'or, soit il aurait dévoilé √2 en faisant le rapport de la diagonale d'un carré et de son côté.

Avec la figure suivante, nous découvrons le pentagone de Hippase et le nombre d'or.

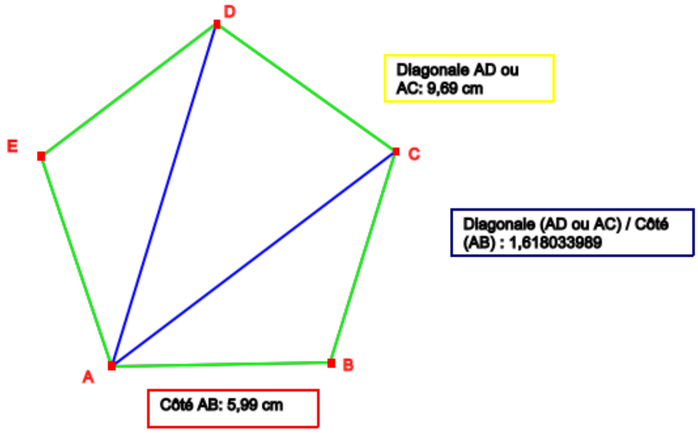


Figure 6

Donc, d'une manière ou d'une autre, les théories lui assignent l'ouverture des portes à un nouveau domaine : l'irrationalité. Cependant, la philosophie des pythagoriciens interdisait l'irrationalité. Effectivement, les partisans de cette communauté pensaient que le monde était régi par les nombres entiers positifs, que l'on pouvait tout expliquer par des fractions. Pythagore disait lui-même que toute chose est nombre. Durant neuf à dix générations, cette école, créée au alentour des années 560-490 avant J.C, garda et respecta cette doctrine. Le jour de la découverte de l'irrationalité par Hippase, toute la doctrine fut mise en doute. Comme on ne pouvait expliquer à l'époque cette incompréhension, on préféra la faire passer sous silence et la garder en secret. De plus, on dit qu'Hippase fut jeté à la mer et noyé pour avoir mis en évidence la nouveauté. Par la suite, on comprit que ce fut seulement grâce à Hippase que l'on put saisir les théories qui ne s'expliquaient pas avant l'irrationalité. Ce fut une révolution. Nous pouvons même aller jusqu'à dire une crise de la pensée dans l'histoire des mathématiques.

Avant d'aller plus loin, il nous faut comprendre certaines propriétés. Nous devons faire la distinction entre la périodicité des décimales des nombres rationnels et celles des nombres irrationnels. Si un rationnel possède des décimales, alors ce sera un nombre déterminé ou limité, donc non-infini. On compte parmi les rationnels aussi les nombres ayant une périodicité dans les décimales, par exemple : $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$. Même si ce résultat a un infini de décimales, il y a une période du chiffre 3, donc il fait partie des rationnels. Les irrationnels, quant à eux, sont reconnus par leurs décimales infinies non périodiques.

Présentons, maintenant, une problématique avec √2 qui illustre bien l'irrationalité. Prenons un carré ABCD de côté 1 et sa diagonale valant √2 qui est démontré par le théorème de Pythagore. Coupons [B,C] en son point milieu M et M' pour le segment [C,D]. A présent, traçons la perpendiculaire de M et M', respectivement, par rapport à (BC) et (CD). Les deux droites aboutiront au même point sur la diagonale du carré, ce qui forme des « marches d'escaliers » (appuyer sur le bouton 1 sur la figure). Si nous additionnons les longueurs horizontales et verticales, le résultat sera 2, étant donné que $1 + 1 = 2$. Comme nous venons de former des marches, dans ce cas, le calcul se présentera ainsi : $(0{,}5 + 0{,}5)2 = 2$. Si nous poursuivons le processus (bouton 2), le nombre de marches augmentera. A un moment donné, les marches « disparaîtront » et laisserons la place à la diagonale du carré. Donc, nous pouvons conclure que $2 = \sqrt{2}$. Ceci s'avère, évidemment, complétement absurde. Alors, quel problème intervient ici ? C'est en fait un problème de limites et nous pouvons dire qu'il s'agit d'un paradoxe entre le fini et l'infini. Les rationnels sont liés au fini et les irrationnels à l'infini. Comprendre le mystère de l'irrationalité est difficile et il ne faut pas mélanger les rationnels avec les irrationnels, car il en résulterait des paradoxes comme celui-ci.

Donc, même si nous divisons jusqu'à l'infini, les marches d'escaliers ne se transformeront jamais en diagonale. Nous croyons que cela est possible parce que notre œil voit cela et nous donne une mauvaise idée de la figure.

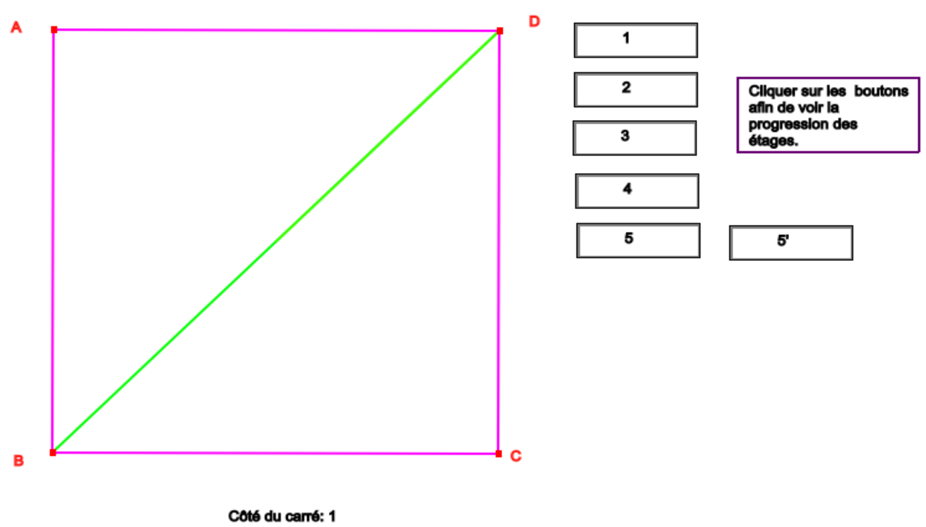


Figure 7

V. Fractions continues

1. Définition

Intéressons nous, à présent, à ce qu'on appelle les fractions continues. Celles-ci se présentent comme leurs noms l'indiquent. Ce sont des fractions à étages « continues » finis ou infinis où a_0 et un entier relatif et a_x sont des entiers positifs. Elles se construisent sous la forme :

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$$

Mode de construction de fractions continues[3]

2. Dans √2

Les fractions continues nous servent à donner une meilleure approximation de certains nombres tel que √2 dont la sienne se présente ainsi :

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

Fraction continue de √2[4]

Comment obtenir une telle égalité ? Faisons une petite présentation :

$x = \sqrt{2} > 0$ et $x^2 = 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 1$

[3] Trouvé sur http://fr.wikipedia.org/wiki/Fraction_continue

[4] Même page web que [3]

Et il n'existe aucun nombre dans N qui vérifie l'équation suivante : $x + 1 = 0$, donc :

$$x - 1 = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{1+x}$$

Ensuite, nous pouvons remplacer le x de la fraction par le x de l'égalité. Ce qui donne :

$$x = 1 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+x}} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+x}}$$

Ainsi de suite, nous substituons le x jusqu'à l'infini et ce même infini va chercher les décimales. Nous pouvons intégrer, ici, la notion d'infini vue au chapitre IV avec la fameuse diagonale et son paradoxe. Nous voyons, de nouveau, que l'irrationalité est victime de l'infini.

Chaque étage de notre équation donne une valeur toujours de plus en plus rapprochée de √2. Le premier étage sera égal à 1.5, le deuxième 1.4, le troisième 1.416. Donc, en continuant de substituer le x dans l'équation, l'approximation de √2 augmentera le nombre de ses décimales jusqu'à l'infini.

Voici deux figures qui nous montrent l'approximation grâce à des spirales. La deuxième figure est un zoom sur la spirale de la première image.

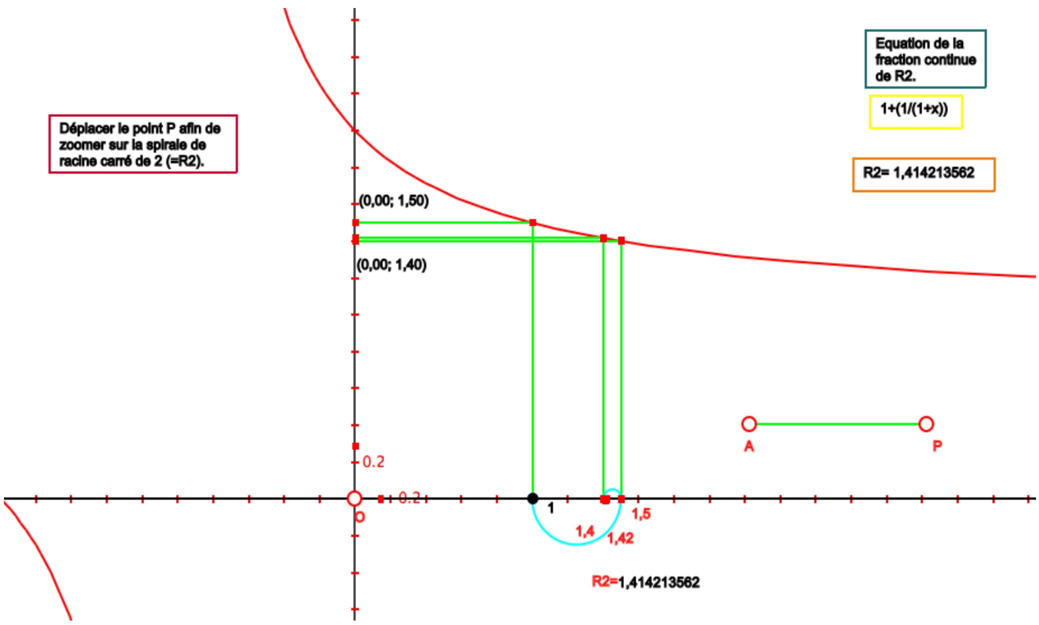


Figure 8

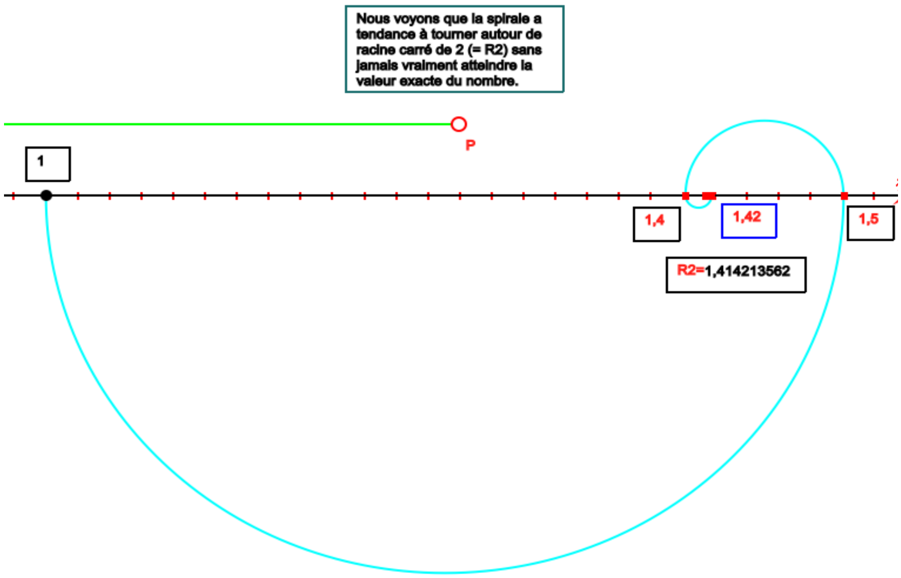


Figure 9

VI. Transcendance

En ce qui concerne les nombres irrationnels, nous pouvons les diviser en deux parties. Il existe les nombres irrationnels transcendants ou irrationnels algébriques.

1. Définition

a. L'algébrique

Par définition, un nombre algébrique est un nombre réel ou complexe, racine d'une équation polynômiale à coefficient entiers, autrement dit, un nombre étant solution d'une équation. Par exemple, $x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Ici, $\sqrt{3}$ est solution de l'équation $x^2 - 3 = 0$.

b. Transcendance

Transcendant est le terme antonyme d'algébrique, donc, par définition, un nombre transcendant est un nombre n'étant pas racine ou solution d'une équation polynômiale à coefficient entiers. Par exemple, le plus célèbre est un de nos sujets d'exploration : π. Il n'existe aucune équation dont π est la racine. Bien sûr, nous trouvons des équations dont la solution n'est qu'une approximation très précise. Par exemple, $\frac{355}{113} = 3{,}141592$, mais il existe, évidemment, des équations bien plus complexes et difficiles à résoudre que celles qui viennent d'être évoquées.

2. Une nouvelle dimension ?

La transcendance n'apparaît qu'autour de l'an 1844 grâce à Joseph Liouville qui fut le premier à avoir démontré l'existence de ces nombres à travers des exemples tel que la constante de Liouville. Il découvrit qu'avec une inégalité venant de ses recherches, il pouvait reconnaître tout nombre transcendant. Il suffisait que son inégalité soit vérifiée. Cependant, on pense que ce ne fut pas le premier à avoir cru en leur essence. Leibniz fut le premier, en 1682, à utiliser le mot « transcendant » dans une de ses œuvres. La découverte de la transcendance fut aussi révolutionnaire que l'irrationalité. On pouvait enfin comprendre pourquoi certains nombres ne vérifiaient pas différentes théories. Cela ouvrit, encore une fois, les portes sur un immense nouveau domaine.

A présent, concentrons nous plus sur π. Ce nombre fut découvert au alentour des années 1900 av. J.C. et on dut attendre jusqu'en 1882 pour vraiment le comprendre. Pendant ce temps, on n'avait qu'une maigre idée de sa nature. Il s'utilisait seulement en temps que nombre en géométrie, puis, petit à petit, on le développa dans de nouveaux domaines comme l'algèbre, l'arithmétique. La découverte de la transcendance de π se fit seulement grâce à e (base des logarithmes naturels dont la valeur approchée vaut 2,718). On dut attendre la preuve de la transcendance de e, en 1873 par Charles Hermite, afin de démontrer, grâce à la fameuse formule d'Euler : $e^{i\pi} = -1$ (avec $i^2 = -1$ et $i \in \mathbb{C}$), que π appartient lui aussi à la même famille des nombres irrationnels transcendants. Donc, il fallut attendre presque 4000 ans pour comprendre que π était transcendant.

Avec cette nouvelle notion, on put comprendre le résulat de plusieurs problèmes non définis de l'Antiquité comme la très connue quadrature du cercle que nous étudierons par la suite.

Faisons un retour en arrière. Nous avons vu, plus haut, les fractions continues, en l'occurrence, celle de √2. En ce qui concerne celui-ci, il est algébrique. L'équation $x^2 - 2 = 0$ admet, par définition, ce nombre comme solution.

Maintenant, intéressons nous à π, qui peut aussi se représenter sous forme de fraction continue dont la séquence des dénominateurs varie constamment. En effet, $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \ldots]$. Ici, le chiffre 3 ne se répète pas, tandis que dans la fraction de √2 (chapitre V), le chiffre 2 est présent à chaque « étage ».

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{14+\cdots}}}}}}}}}}}}$$

Fraction continue de π[5]

Il nous est impossible de construire, pour π, une figure équivalente à celle de √2, car π est transcendant. Donc, il n'existe aucune équation dont π est la solution.

π n'est le résultat d'aucunes fractions ou d'équations. Cependant, nous possédons une solution avec ces fractions continues, ce qui est curieux, étant donné qu'on cite à plusieurs reprises que π est incalculable. Les fractions continues, vues plus haut, nous prouvent le contraire.

Ces fractions nous permettent de découvrir quelque chose de curieux. Si nous observons les infinis de décimales de π et √2 - nous savons évidemment qu'ils appartiennent à l'ensemble des irrationnels – nous remarquerons que rien permet de savoir s'ils sont algébriques ou transcendants. A ce moment, les fractions continues entrent en jeu. Les nombres irrationnels algébriques possèdent tous une séquence de dénominateurs régulière, donc une périodicité s'installe. Par exemple : $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots]$. Mais, la séquence des nombres irrationnels transcendants est irrégulière et donc, il n'y a aucune périodicité. Par exemple : $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \ldots]$.

Donc, grâce aux fractions continues, nous pouvons différencier les nombres algébriques des transcendants.

[5] Trouvé sur http://fr.wikipedia.org/wiki/Pi#Fractions_continues

VII. Les « vieux » problèmes de l'Antiquité

1. Résumé

Passons à quelques vieilles énigmes. Durant l'Antiquité, il exista trois problèmes insolubles. On les appelle les « trois grands problèmes de l'Antiquité ». Les trois énigmes – où seuls la règle non graduée et le compas sont à disposition pour la construction – sont la quadrature du cercle : construire un carré dont l'aire est égale à celle d'un cercle donné, la trisection d'un angle : diviser un angle en trois parties égales et enfin la duplication du cube consiste à doubler le volume d'un cube donnée. Seules la duplication du cube et la quadrature du cercle nous intéressent ici.

2. La quadrature du cercle

a. *Définition*

La quadrature du cercle consiste à construire un carré dont l'aire égale celle d'un cercle donné.

b. *Une solution ?*

Les plus anciens à avoir essayer de résoudre ce problème furent les égyptiens dont un scribe nommé Ahmès. Celui-ci écrivit, en -1650, le papyrus mathématique le mieux conservé à nos jours : le papyrus Rhind. Il nous donne une règle pour calculer la quadrature du cercle : « construire un carrée équivalent à un cercle… retirer le 1/9 au diamètre et construire le carré sur ce qui reste ». Donc, Ahmès nous propose de construire un carré sur les 8/9 du diamètre et nous apercevrons que les deux aires s'avèrent être proches.

Cependant, comment expliquer qu'il est impossible de résoudre cette énigme ? Nous pouvons le démontrer par un petit calcul :

L'aire d'un carré se calcule ainsi : $Aire = a^2$ et celle d'un cercle : $Aire = r^2 \cdot \pi$. Donc, si nous voulons obtenir un cercle et un carré qui possèdent la même aire, alors nous pouvons affirmer que : $a^2 = r^2 \cdot \pi$. Ce qui équivaut à : $a = \sqrt{r^2} \cdot \sqrt{\pi}$. Ce qui conduit finalement à : $a = r \cdot \sqrt{\pi}$. Voici la raison pour laquelle le problème ne peut être résolu. √π n'est pas constructible, c'est-à-dire qu'il ne peut pas être construit qu'à la règle non graduée et au compas. La prochaine figure a l'air d'être la solution du problème. Cependant, la quadrature reste impossible. Comme π est irrationnel, on ne peut construire la quadrature. Ici, les aires sont égales, mais inexactes. Le logiciel de modélisation n'utilise que des valeurs approchées appartenant à l'ensemble ℚ et comme π possède un nombre infini de décimales, il ne fait pas partie de cet ensemble. Ceci est la raison pourquoi on croit que la quadrature est possible. Tant que les décimales de π sont infinies, la quadrature restera inconstructible.

Voici la figure selon Rhind et le trompe-œil :

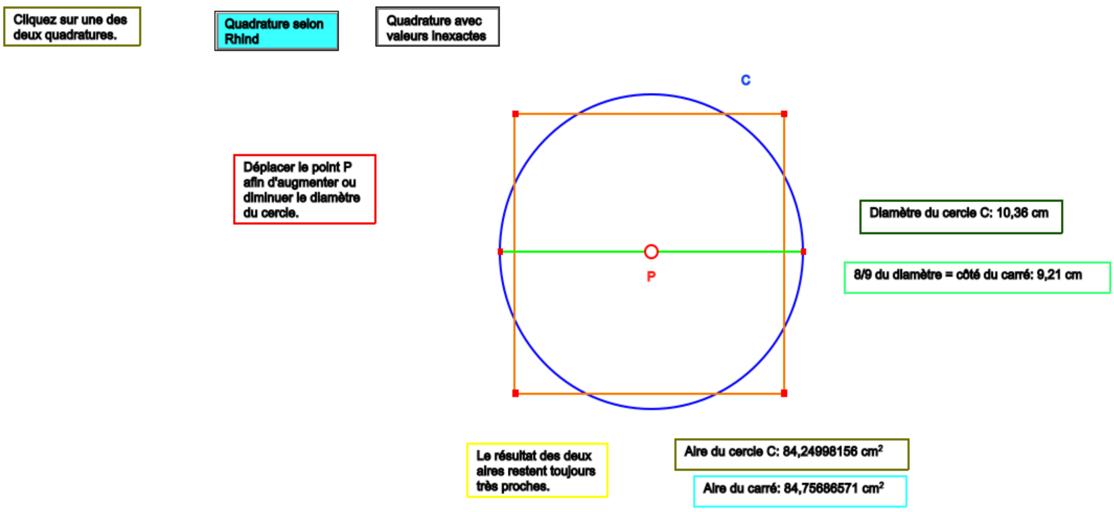


Figure 10

Sur la figure suivante, nous pouvons voir un cercle se transformant en un carré :

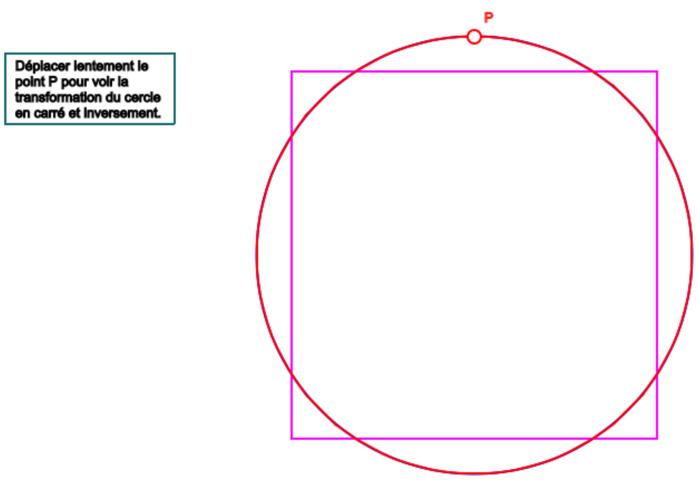


Figure 11

Dans ces figures, nous comprenons que la quadrature n'est seulement possible avec des nombres rationnels.

3. La duplication du cube

a. *Définition*

Construire un cube dont le volume est le double d'un autre cube donné. Ainsi se présente l'énigme.

b. *Le problème*

La naissance de celui-ci remonte à une légende racontée par Eratosthène. Le peuple de Delphes, victimes de la peste, consulta l'oracle. Celui-ci leur répondit qu'il fallait doubler le volume de l'autel d'Apollon dont la structure ressemblait à un cube parfait. Nul ne sut comment faire, alors l'aide de Platon fut nécessaire. Cependant, lui non plus, ne connaissait pas la réponse au problème, mais déclara que le dieu n'avait en aucun cas besoin d'un autre autel, mais que la géométrie devait être étudiée avec plus d'attention et plus en profondeur.

Nous savons et cela a été démontré qu'il est impossible de construire, seulement avec l'aide de la règle non graduée et du compas, un cube dont le volume est le double de l'original. Cela reviendrait à calculer la racine cubique de 2. Démontrons le ! Un cube d'arête $a = 1$ détient un volume valant 1, car $V = a^3 = 1$. Si nous cherchons le double du volume, alors $2V = 2$. Donc $x^3 = 2$ où x est la longueur de l'arête du cube recherché. Ce qui donne finalement $x = \sqrt[3]{2}$. La racine cubique de 2 est un nombre non constructible, tout comme π que nous venons de découvrir.

Dans la figure suivante, nous présentons la duplication du cube, évidemment incorrecte, car notre logiciel n'utilise que des nombres rationnels. Cependant, cela nous donne une image visuelle possible du problème. Nous avons construit en plus la cissoïde de Dioclès. Il s'agit d'une courbe que Dioclès a construit au IIème siècle av. J.-C. afin de montrer graphiquement l'énigme de la duplication du cube.

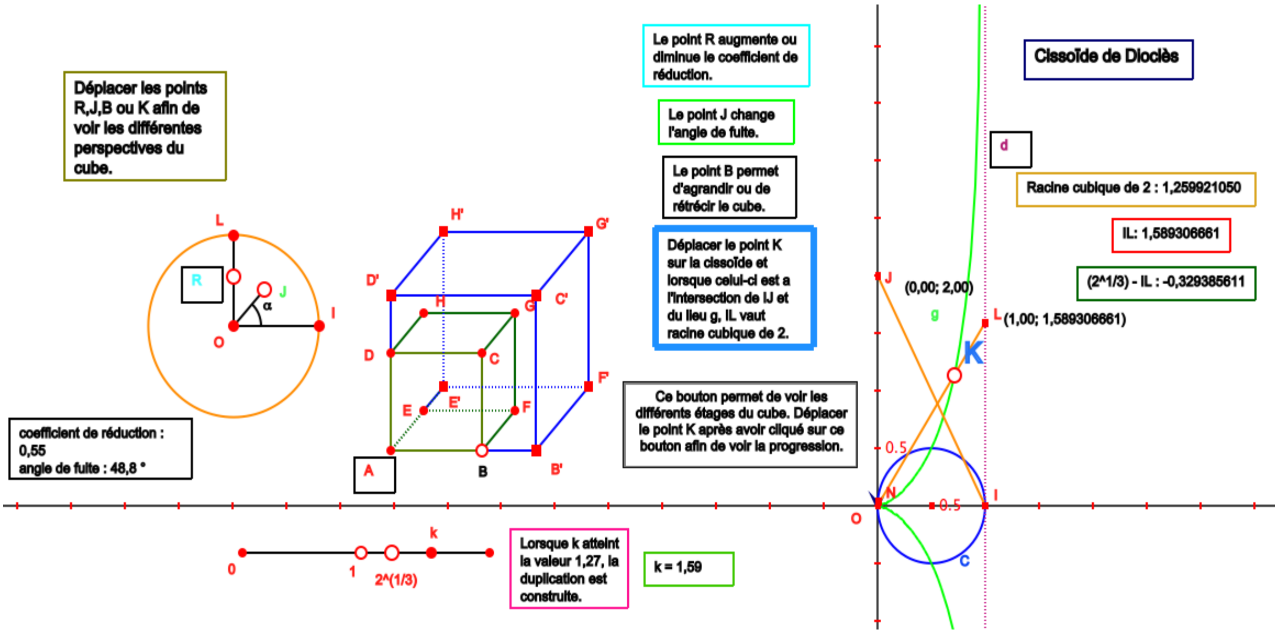


Figure 12

VIII. √2 dans la photographie

1. Le diaphragme

a. Notions de photographie

Un appareil photo est constitué de beaucoup de pièces de précision. Il y a une pièce en particulier nommée « diaphragme » qui nous intéresse. Un diaphragme, en photographie, est un dispositif, dont l'ouverture est réglable, permettant de capter les faisceaux lumineux sur le papier photosensible. Donc, il règle la quantité de lumière entrant dans l'appareil. Ainsi, il sert à améliorer la netteté des images prises.

Afin d'étudier la particularité du diaphragme avec √2, il nous faut d'abord comprendre certaines notions de la photographie.

Il nous faut saisir comment l'ouverture du diaphragme fonctionne. L'ouverture est calculée par le rapport entre, ce qu'on appelle, la distance focale de l'objectif et le diamètre de l'ouverture. On note $N = f/d$ avec f la distance focale et d le diamètre de l'ouverture. C'est dans ce diamètre que √2 fait son apparition.

b. Apparition de √2

Sur certains appareils photographiques, il y a une suite de chiffres marquée sur « la bague » de réglage de l'ouverture. Les nombres 1 ; 1.4 ; 2 ; 2.8 ; 4 ; 5.6 ; 8 ; 11 ; 16 ; 22 ; 32 ; 45 ; et ainsi de suite, sont les valeurs possibles du diamètre de l'ouverture. Donc, l'ouverture sera notée N= f/1 ; f/1.4 ; f/2 ; etc. Curieusement, cela correspond à $(\sqrt{2})^n$. Mais pourquoi une suite pareille ? Ceci, car il a été défini que le rapport de flux lumineux doit être dans un rapport 2. Donc, le $flux = diamètre^2$. Ainsi, si le flux est divisé par 2, le diamètre sera divisé par √2.

Dans la figure suivante, nous voyons que plus l'indice du diamètre est grand, plus l'ouverture du diaphragme sera petite.

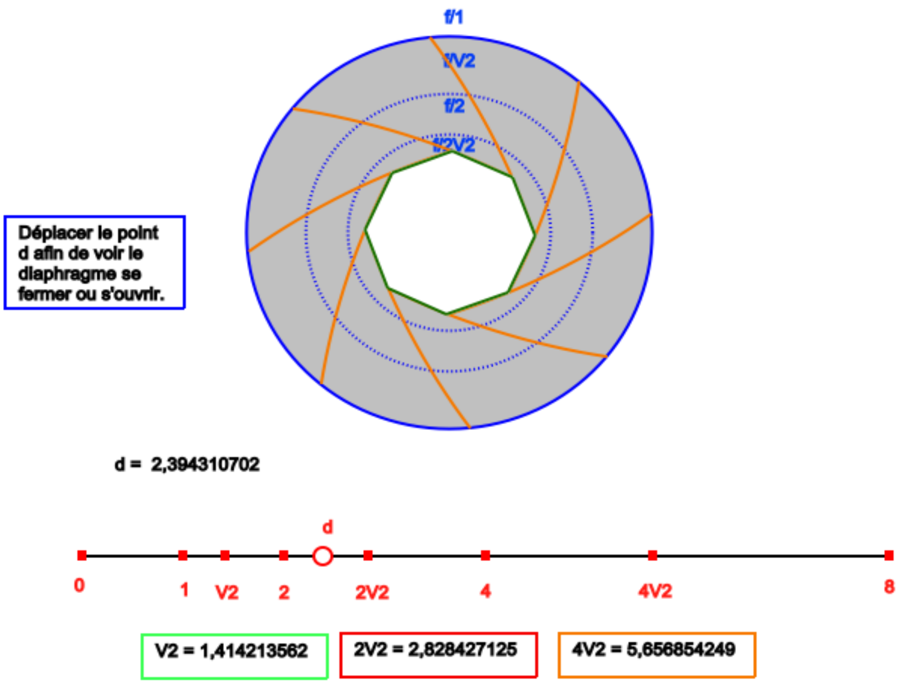


Figure 13

IX. Nombre d'argent

1. Introduction

Tous les mathématiciens connaissent le légendaire nombre d'or, unique solution positive de l'équation : $x^2 = x + 1$. Le nombre d'or, également noté φ, vaut 1,618… par le calcul :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ce nombre fut le fruit de longues recherches au fil de l'histoire et il comporte une foule de secrets. Celui-ci ne fera pas partie de nos recherches, cependant son « frère cadet » le sera. Il s'agit du nombre d'argent, aussi appelé proportion d'argent et noté δAg. Tout comme le nombre d'or, il est irrationnel et algébrique. Il est la seule solution positive de l'équation : $x^2 = 2x + 1$. Donc, par cette équation, la racine positive est $1 + \sqrt{2}$. Ceci est la proportion d'argent qui vaut approximativement 2,4142…

2. Comparaison avec le nombre d'or

a. *Les fractions continues*

Le nombre d'argent peut être le résultat d'une fraction continue. Ce qui est intéressant, c'est que la suite de chiffres de la fraction du nombre d'or est [1, 1, 1, 1, ...] :

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

Fraction continue du nombre d'or[6]

et que celle du nombre d'argent est [2, 2, 2, 2,…] :

[6] Trouvé sur http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_d%27or#Fraction_continue

$$\delta_{Ag} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

Fraction continue du nombre d'argent[7]

Nous pouvons voir qu'ils sont liés d'une certaine manière. Voilà, un premier exemple du pourquoi ils se nomment nombre d'or et d'argent.

b. Les rectangles

A présent, nous montrerons les différences et ressemblances du rectangle d'or à celui d'argent.

Le rectangle d'or est un rectangle de longueur a et de largeur b dont le rapport de a/b est égal au nombre d'or. Il se présente ainsi :

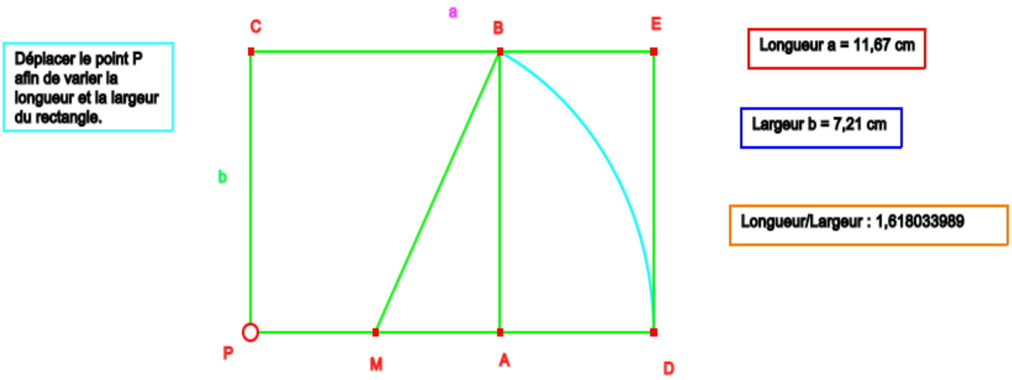


Figure 14

Le rectangle commence par la construction d'un carré PABC. On cherche le milieu M du segment [P,A] et, de M, on trace un segment jusqu'au point B. On utilisera [M,B] comme rayon d'un cercle afin de trouver le point D sur le prolongement du segment [P,A]. Finalement, on ferme le rectangle ADEB en cherchant E qui forme un « petit » rectangle avec les points ADB. Ainsi *a* égale à la longueur [E,C] et *b* équivaut à la largeur [P,C]. Qu'importe la longueur et la largeur, le rapport des deux restera toujours 1,618…, donc le nombre d'or.

7 Trouvé sur http://fr.wikipedia.org/wiki/Proportion_d%27argent#D.C3.A9finition

Nous allons tenter de réaliser, cette fois-ci, un rectangle d'argent à la manière de celui d'or. Donc, il nous faut construire un rectangle dont le rapport de a/b serait égal à la proportion d'argent. Cependant, il existe deux proportions d'argents dont il nous faut différencier la signification. La première correspond à celle que nous connaissons, c'est-à-dire 2,414… et la deuxième représente le format de papier ISO 216 dont le rapport de la longueur et la largeur donne √2.

Montrons d'abord le format de papier. Comment trouver un rectangle dont a/b égalera √2 ?

Il suffit de construire un carré ABCD avec une diagonale partant de B allant à D. Grâce à celle-ci, un cercle peut être construit avec la diagonale comme rayon. Ainsi nous trouvons le point d'intersection E sur le prolongement du segment [B,C]. Comme avec le rectangle d'or, il suffit, finalement de fermer le rectangle ABEF avec F comme sommet du « petit » rectangle DCEF.

La particularité de ce rectangle se trouve dans sa structure. Si nous divisons sa longueur par 2, il se formera un nouveau rectangle dont la moitié de l'ancienne longueur devient la largeur du nouveau rectangle. Ce nouveau rapport longueur/largeur équivaut à √2. Si nous continuons le processus de division, nous verrons, donc, que le rapport de a/b donnera toujours √2(=1,414…).

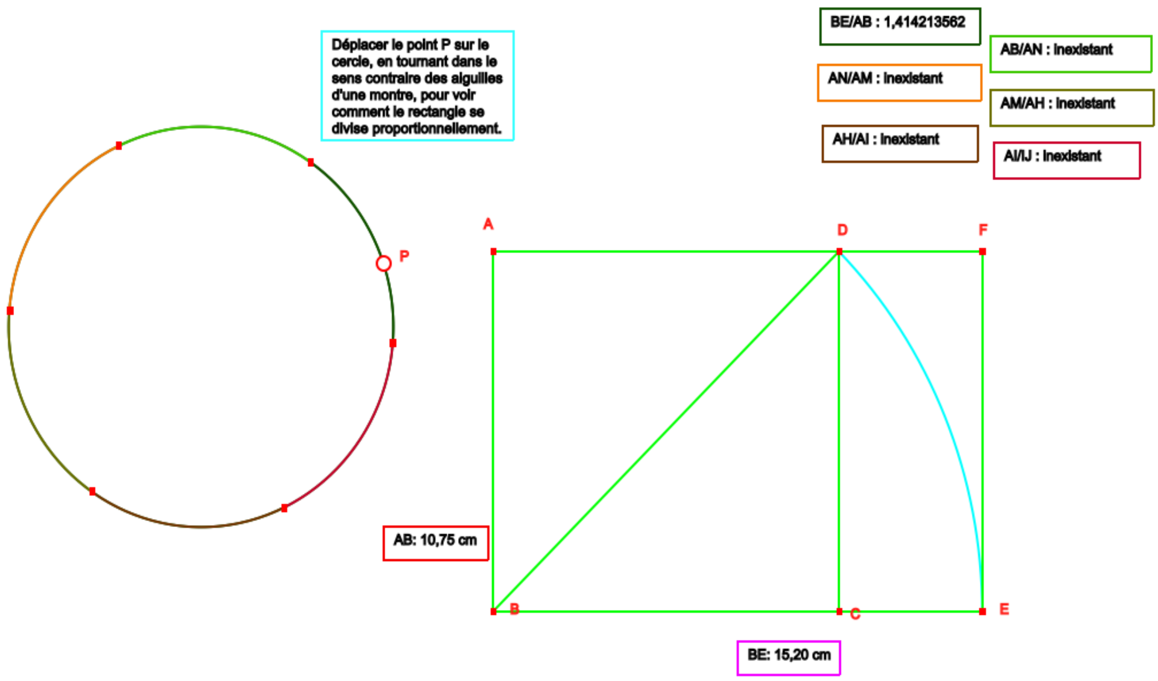


Figure 15

A présent, intéressons-nous à la « vraie » proportion d'argent. Le principe est le même que le « premier » rectangle d'argent. Cependant, il nous faut rajouter un carré de la même longueur que celui construit antérieurement. Ainsi, nous obtiendrons √2+1(=2,414) comme résultat du rapport.

Dans le rectangle suivant, une particularité dans la structure a également lieu. Cette fois-ci, le « grand » rectangle est composé de deux carrés et d'un « petit » rectangle. Le rapport de la longueur/largeur du « grand » rectangle vaudra √2+1. Maintenant, si nous transformons le « petit » rectangle en « grand », nous pouvons construire, de nouveau, à l'intérieur de celui-ci deux carrés et un « petit » rectangle de proportions égales. Curieusement, le rapport longueur/largeur du nouveau « grand » rectangle reste √2+1 et si nous continuons de diviser les rectangles ainsi de suite, le rapport demeurera toujours le même.

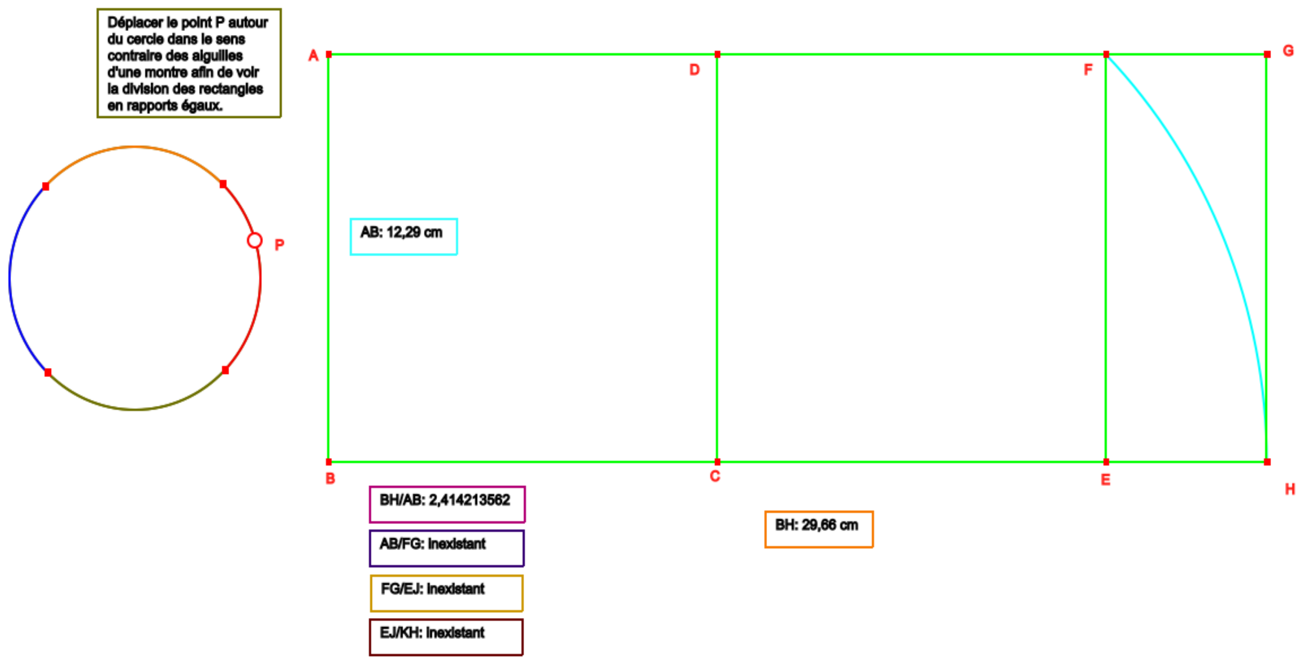


Figure 16

X. Viète

1. Résumé de ses exploits

François Viète fut un français du XVIème siècle connu pour ses exploits en matière de mathématiques.

Déjà à son époque, Viète pouvait percevoir l'incommensurabilité de π, cependant il ne savait comment le prouver ou le démontrer. Avec ceci, il sut, par exemple, que la quadrature du cercle était sans solution.

Aussi, il fut le premier à utiliser les produits infinis. Nous allons en étudier deux venant de ses recherches dont un étant le premier apparu dans l'histoire des mathématiques. Cependant, nous n'aborderons pas les produits infinis eux-mêmes étant donné que ce sujet sort du cadre de notre présentation, mais nous nous intéresserons aux égalités données par les deux formules qui suivent.

2. La formule de Viète

Voici, donc, la première formule que Viète fit apparaître dans l'histoire :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

Produit infini de π[8]

L'intriguant, ici, est le surgissement de π. Viète, ayant conscience de l'irrationalité de π, trouva un moyen de le calculer même qu'il n'avait aucune notion de la transcendance étant donné qu'elle apparut seulement au XIXème siècle. Donc, nous pouvons dire qu'il aurait même « surpassé » Joseph Liouville (démontra la transcendance).

[8] Trouvé sur http://fr.wikipedia.org/wiki/Pi#Formules_et_calculs_jusqu.E2.80.99en_1900

De plus, l'apparition de √2 reste le plus curieux et, étonnamment, π est calculé grâce à 2 et √2. Nous voyons donc, avec ce produit, la synthèse parfaite de notre présentation.

La deuxième est la plus intéressante des deux formules, car nous obtenons π comme réponse à celle-ci. Elle se présente ainsi :

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \times \cdots$$

Produit infini de π[9]

Donc, nous voyons que les fractions continues ne sont pas le seul moyen possible de trouver π comme résultat d'un calcul.

[9] Trouvé sur http://fr.wikipedia.org/wiki/François_Viète#La_pol.C3.A9mique_avec_Scaliger

XI. Conclusion

Pour conclure, nous avons donc rencontré quelques propriétés de π et √2, certaines plus étonantes que d'autres.

Leurs décimales augmentent de jours en jours grâce aux différentes formes de calculs que nous avons vues et, nous pouvons conclure, qu'il existe seulement une seule valeur exacte à ces deux nombres : celle de π est π et celle de √2 est √2. Ceci, car ils font parties de l'ensemble des irrationnels.

Avec nos figures Cabri, nous pouvions illustrer d'une meilleure façon le sens d'irrationalité et de transcendance. Ces deux termes restent encore aujourd'hui une problématique dans le domaine des mathématiques et, conséquence de cela, certaines énigmes demeurent toujours impossibles. Même si Cabri-Géomètre n'utilise que des nombres rationnels, nous avons eu l'occasion de « comprendre » certaines problématiques ou notions à travers nos figures.

Pour finir, π et √2 restent des nombres à mystères même après notre présentation et tout ce que nous venons d'étudier. Un mystère n'est pas quelque chose d'incompréhensible, mais quelque chose que l'on a jamais fini de comprendre. Donc, l'irrationnalité reste compliquée et nous conduit, parfois, vers des paradoxes, mais elle n'est pas impossible à comprendre pour l'esprit humain. Nous n'avons pas étudié les moyens de démontrer l'irrationalité et la transcendance, car ils sortent du cadre de notre présentation, mais nous les avons fait ressentir grâce à nos figures. Donc, même difficilement compréhensible, les deux notions sont bien présentes dans notre monde.

Bilan personnel

Je dois admettre que réaliser ce travail a été une des expériences les plus enrichissantes de ma jeune carrière d'étudiant, mais aussi une des plus surprenantes et imprévisibles. J'avais de la peine à trouver un sujet qui me convienne. J'avais visité plusieurs ateliers sans succès et, soudainement, je me rappelai que mes trois frères aînés avaient réalisé un travail en mathématiques avec le même professeur accompagnant M. Frachebourg. Etant de nature curieuse, j'ai visité l'atelier offert par celui-ci, même si je croyais que cela serait sans intêret. Je me trompais, car mon professeur sut me motiver et m'encourager à réaliser une présentation en mathématiques, alors que je parcourais une branche espagnole et que les sciences n'étaient pas mon point fort. J'ai tout de même décidé de franchir le pas et de me lancer dans ce travail.

Autre critère qui me permit de choisir cette branche fut que le travail devait être rédigé avec « Cabri-géomètre ». J'ai eu le plaisir et la chance de découvrir ce logiciel et de devoir apprendre à le maîtriser ne l'ayant jamais utilisé. Ce qui demeure exceptionel avec celui-ci est que n'importe qui peut dompter ce logiciel, qu'importe le domaine parcouru jusque là.

Donc, je suis parti au point 0 et sur quelque chose de totalement nouveau. Ainsi, une aventure se présenta devant moi.

De plus, j'ai appris à prendre du temps à synthétiser un sujet et j'ai dû renoncer à beaucoup d'évènements. Hélas, avec un travail de maturité sous les bras et une échéance à respecter, il faut apprendre à dire non à certains plaisirs. De plus, ayant eu quelques problèmes personnels, un ralentissement apparut et déséquilibra mes délais. De ce fait, rattraper tout mon retard devint une de mes priorités, après mes cours évidemment.

Finalement, j'ai eu énormément de plaisir à utiliser Cabri-Géomètre avec toutes les richesses et directions que celui-ci offre et je dois aussi admettre que cela fut seulement grâce à l'aide et au soutien de certains amis et de la famille que je pus réaliser ce travail. Un grand merci aussi à mon professeur accompagnant M. Frachebourg qui me dirigea dans la bonne direction et me soutint également.

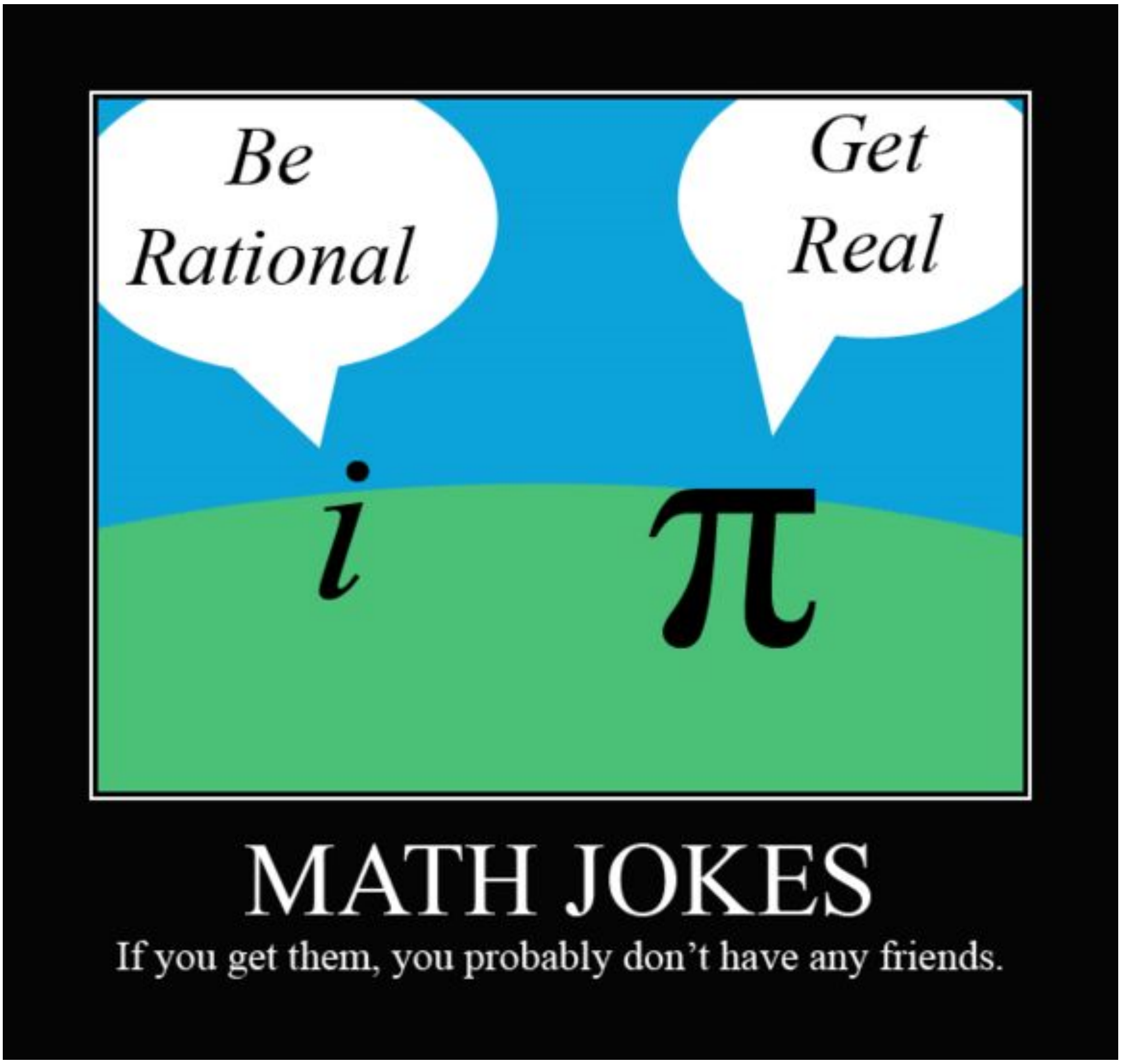
Bibliographie

Ouvrages consultés :

- Le fabuleux destin de √2 de Benoît Rittaud
- Le nombre π de l'Association pour le Développement de la Culture Scientifique (ADCS).

Sites internet consultés :

- http://fr.wikipedia.org/wiki/Pi: Définition, propriété,…
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Racine_carrée_de_deux: Définition, propriété,…
- http://trucsmaths.free.fr/Pi.htm : Histoire de π
- http://fr.wikipedia.org/wiki/YBC_7289 : Tablette
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_irrationnel : Irrationalité
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Hippase_de_Métaponte : Incommensurabilité, Hippase de Métaponte
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Pythagore: Phytagore et sa doctrine
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_transcendant: Transcendance
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Fractions_continues: Fractions continues
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Pi#Fractions_continues: Fractions continues de π
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Quadrature_du_cercle: Quadrature du cercle
- http://debart.pagesperso-orange.fr/histoire/grands_problemes.html#ch2: Quadrature du cercle
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Duplication_du_cube: Duplication du cube
- http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Histoire/Duplcube.htm: Duplication du cube
- http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Histoire/Quadcerc.htm: Quadrature du cercle
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Diaphragme_(photographie): Diaphragme
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Ouverture_(photographie): Ouverture du diaphragme
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_d%27or: Nombre d'or
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_d%27argent: Nombre d'argent
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Proportion_d%27argent: Nombre d'argent
- http://fr.wikipedia.org/wiki/ISO_216: Rectangle d'argent
- http://fr.wikipedia.org/wiki/François_Viète: François Viète


Be
Rational
Get
Real
i
π
MATH JOKES
If you get them, you probably don't have any friends.

FIN