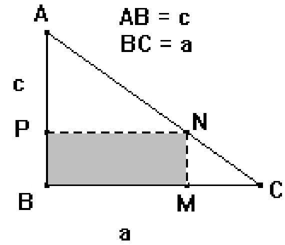
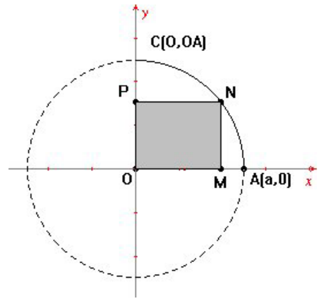
Problèmes d'optimisation

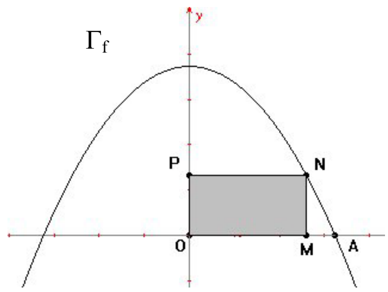
(Analyse - Dérivées)



Exercice 1 : Soit un triangle ΔABC rectangle en B avec AB = c et BC = a .
M est un point quelconque du segment]BC[, N = $p_{(AB)}(M) \in (AC)$ et $P = p_{(BC)}(N) \in (AB)$. Le quadrilatère MNPB ainsi construit est un rectangle .
Etudier les variations du périmètre et de l'aire du rectangle BMNP.



Exercice 2: Soit un R.O.N. $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle $\mathcal{C}$ (O,OA), A(a,0) et a > 0.
M est un point du segment]O,A[.
Etudier les variations de l'aire du rectangle OMNP, où N est le point du cercle $\mathcal{C}$ tel que (MN) // (OJ) et $P = p_{(OA)}(N) \in (OJ)$.

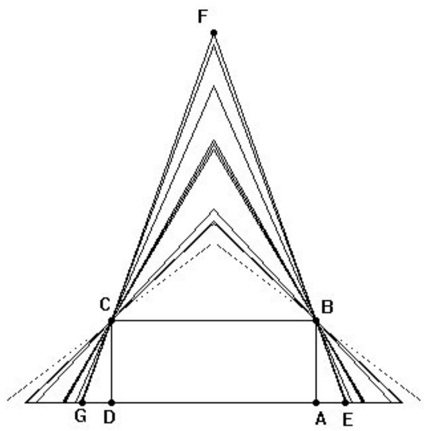


Exercice 3: Soit un R.O.N. $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, le graphique Γ_f de la fonction f définie par $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, et a < 0 , c > 0 et b = 0 .
M est un point du segment]O,A[et $A \in \Gamma_f \cap [O,I)$.
Etudier les variations de l'aire du rectangle OMNP, où N est le point du graphique Γ_f tel que (MN) // (OJ) et $P = p_{(OA)}(N) \in (OJ)$.

Exercice 4: Soit un R.O.N. $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et la fonction f définie par $y = f(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{1 - x^2}$.

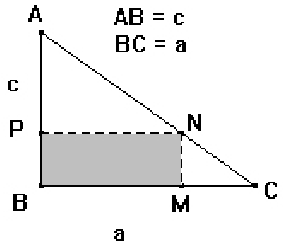
M est un point du segment]O,A[et $A \in \Gamma_f \cap [O,I)$.
Etudier les variations de l'aire du rectangle OMNP, où N est le point du graphique Γ_f tel que (MN) // (OJ) et $P = p_{(OA)}(N) \in (OJ)$.

Exercice 5 : Soit un rectangle ABCD de côté AB=a et BC=b et le triangle isocèle exinscrit EFG.
Etudier les variations de l'aire de ce triangle.



Problèmes d'optimisation - corrigés

(Analyse - Dérivées)



Exercice 1 : Soit un triangle ΔABC rectangle en B avec AB = c et BC = a .
M est un point quelconque du segment]BC[, $N = p_{(AB)}(M) \in (AC)$ et
$P = p_{(BC)}(N) \in (AB)$. Le quadrilatère MNPB ainsi construit est un rectangle .
Etudier les variations du périmètre et de l'aire du rectangle BMNP.

Posons la variable x = BM et le paramètre y = BP
Aire : $s(x) = BM \cdot BP = x \cdot y$; or $y = f(x)$ si $(AC) = \Gamma_f$
équation de (AC) :

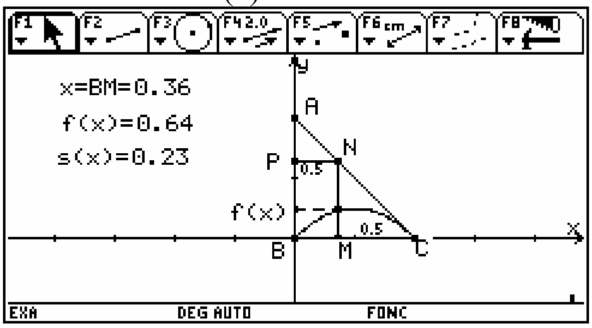
$y - y_o = m(x - x_o)$ et $x_o = 0$, $y_o = c$ et $m = \dfrac{0 - c}{a - 0}$

$\Leftrightarrow \quad y = \dfrac{-c}{a} x + c = f(x)$

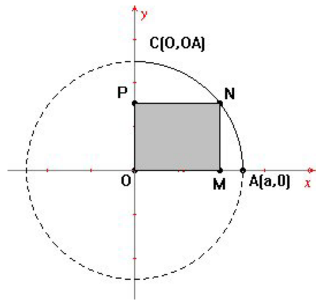
d'où $\quad s(x) = x \cdot (\dfrac{-c}{a} x + c) = \dfrac{-c}{a} x^2 + cx$

et $\quad s'(x) = \dfrac{-2c}{a} x + c = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$: M milieu de [B,C]

si $a = c = 1$, $y = f(x) = -x + 1$ et
$s(x) = -x^2 + x$



$s'(x) = -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ *(maximum)*



Exercice 2: Soit un R.O.N. $\mathcal{R} = (O , \vec{i} , \vec{j})$, le cercle $\mathcal{C}$ (O,OA), A(a,0) et a > 0.
M est un point du segment]O,A[.
Etudier les variations de l'aire du rectangle OMNP, où N est le point du cercle $\mathcal{C}$ tel que (MN) // (OJ) et $P = p_{(OA)}(N) \in (OJ)$.

Posons la variable x = OM et le paramètre y = OP
Aire : $s(x) = OM \cdot OP = x \cdot y$; or $y = f(x)$ si car $N \in \Gamma_f$

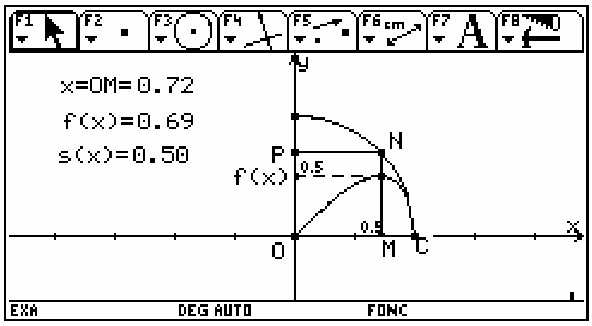
d'où $\quad s(x) = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$

et $\quad s'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + x \cdot \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \dfrac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

et $\quad s'(x) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} a$

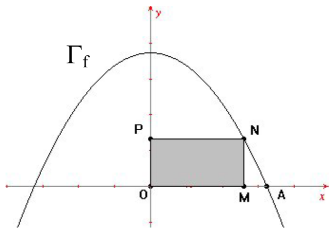
si $a = 1$, $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ et

$s(x) = \dfrac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$



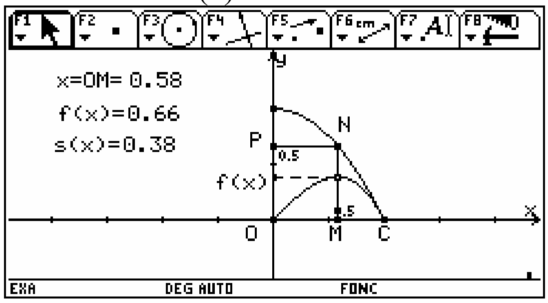
$s'(x) = 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ *(maximum)*

Exercice 3: Soit un R.O.N. $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, le graphique Γ_f de la fonction f définie par $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, et $a < 0$, $c > 0$ et $b = 0$.
M est un point du segment]O,A[et $A \in \Gamma_f \cap [O,I)$.
Etudier les variations de l'aire du rectangle OMNP, où N est le point du graphique Γ_f tel que (MN) // (OJ) et $P = p_{(OA)}(N) \in (OJ)$.



Posons la variable x = OM et le paramètre y = OP
Aire : $s(x) = OM \cdot OP = x \cdot y$; or $y = f(x)$ si car $N \in \Gamma_f$
d'où $s(x) = x \cdot (ax^2 + c) = ax^3 + cx$
et $s'(x) = 3ax^2 + c$
et $s'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{3a}}$

si $a = -1$ et $c = 1$, $y = f(x) = -x^2 + 1$ et $s(x) = -x^3 + x$



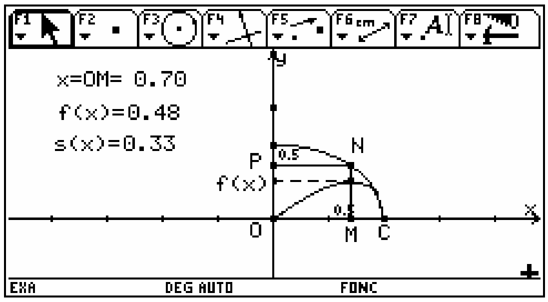
$s'(x) = -3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$ *(maximum)*

Exercice 4: Soit un R.O.N. $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et la fonction f définie par $y = f(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{1-x^2}$.

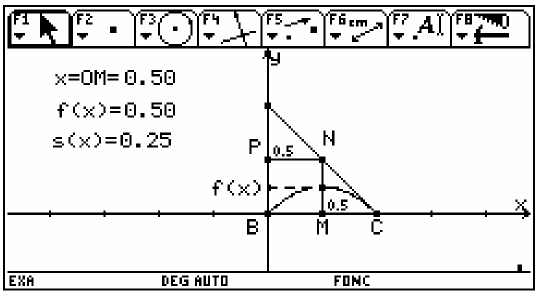
M est un point du segment]O,A[et $A \in \Gamma_f \cap [O,I)$.
Etudier les variations de l'aire du rectangle OMNP, où N est le point du graphique Γ_f tel que (MN) // (OJ) et $P = p_{(OA)}(N) \in (OJ)$.

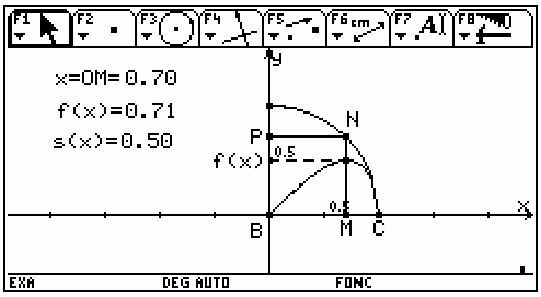
Posons la variable x = OM et le paramètre y = OP
Aire : $s(x) = OM \cdot OP = x \cdot y$; or $y = f(x)$ si car $N \in \Gamma_f$
d'où $s(x) = x \cdot \dfrac{2}{3}\sqrt{1-x^2}$
et $s'(x) = \dfrac{2}{3}\left[\sqrt{1-x^2} + x\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \dfrac{2}{3}\left[\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right]$
et $s'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

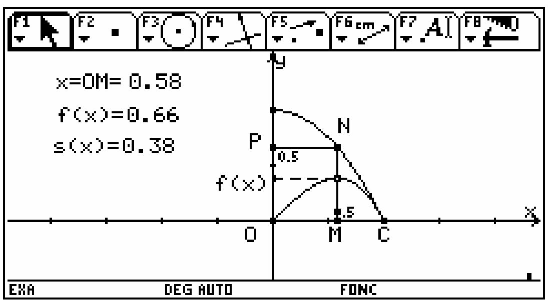
si $y = f(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{1-x^2}$ et $s(x) = x \cdot \dfrac{2}{3}\sqrt{1-x^2}$

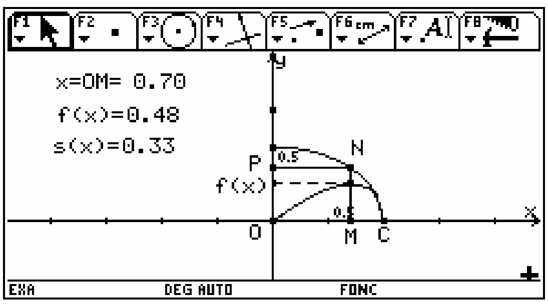


$s'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$ *(maximum)*



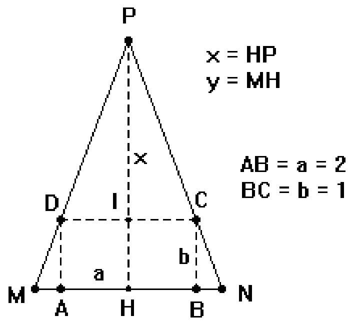






Exercice 5 : Corrigé

Déterminer la fonction a qui donne l'aire a(x) d'un triangle isocèle ΔMNP circonscrit à un rectangle fixe ABCD dont les dimensions sont AB = a = 2 et BC = b = 1, avec x = HP, hauteur du triangle ΔMNP, comme variable.



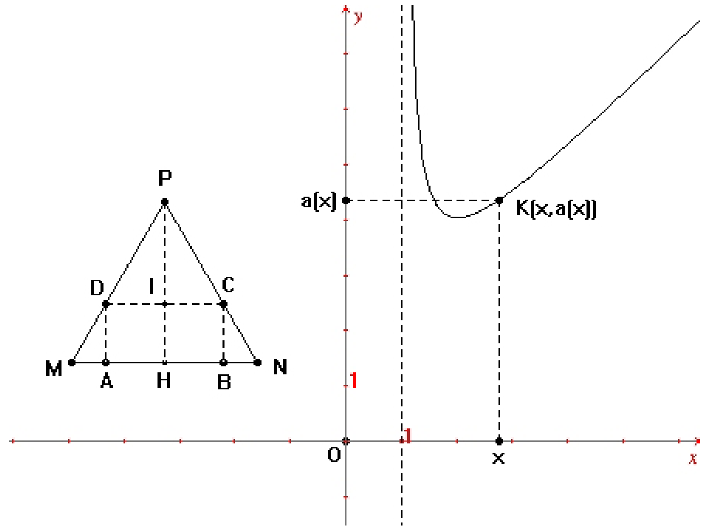
- ♥ constantes : a = 2 et b = 1
- ♥ fonction : aire = base · hauteur = $\frac{1}{2}$MN · HP = MH · HP = y · x
- ♥ variable : HP = x, avec 1 < x
- ♥ paramètre : MH = y
- ♥ calcul de a(x) : a(x) = y · x ; exprimons y en fonction des constantes et de la variable x :

  avec le théorème de Thalès dans ΔMHP et ΔDIP ,

  on a $\frac{MH}{DI} = \frac{PH}{PI} = \left(\frac{MP}{DP}\right) \Rightarrow \frac{y}{1} = \frac{x}{x-1}$

  ainsi, $a(x) = y \cdot x = \frac{x}{x-1} \cdot x = \frac{x^2}{x-1}$

Construction avec Cabri-géomètre :



Représentation graphique de la fonction a :
lorsque le point P se rapproche du point I,
x tend vers 1 par la droite et le point K (x ,.a(x)) dessine une courbe qui se rapproche de la droite verticale x = 1, sans jamais la couper.
On a

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} a(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x^2}{x-1} = \left(\frac{1}{0_+}\right) = +\infty .$$

Cette limite " infinie" traduit la présence d'une droite verticale (d'équation x = 1) qui " accompagne" la courbe de la fonction a lorsque x tend vers 1 .

De plus $a'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ et a'(x) = 0 et x > 1 ⇔ x = 2 et a'(x) > 0 ⇔ x > 2 ;

L'aire du triangle MNP est donc maximale en x = 2 et elle vaut a(2) = 4