CHAPITRE 1 - REPRESENTATION D'UNE COURBE

EXERCICES

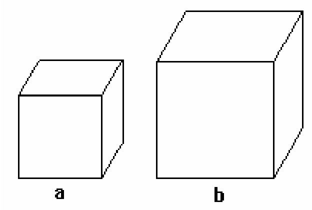
1) a) Etudier la courbe Γ donnée par sa représentation paramétrique suivante : $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$, $(a > 0)$;

b) Donner une équation cartésienne de cette courbe Γ ;

c) Calculer la distance du point le plus éloigné de l'asymptote à l'asymptote.

2) **La légende** : (430 av.J.C.)
La peste régnait à Délos ; on consulta l'oracle : pour être apaisé, Apollon exigea qu'on lui construise un autel deux fois plus grand que celui qui lui était consacré, tout en conservant sa forme cubique.

Le problème de la duplication du cube :
Pour doubler le volume d'un cube, il faut multiplier son côté par la racine cubique de 2.



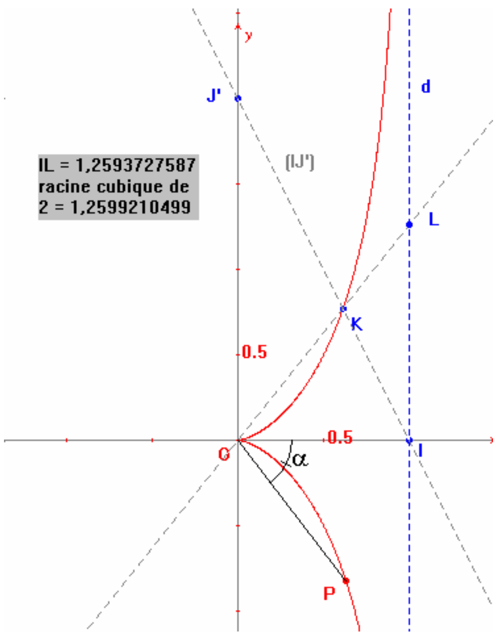
En effet : $b^3 = 2a^3 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{2} \cdot a$
Or, parmi les géomètres grecs, il y avait les puristes (Euclide, Eudoxe,…) et les autres (Ménechme, Dioclès,…); les puristes n'acceptaient que les constructions à la règle et au compas, à l'exclusion de tout autre procédé. Malheureusement, ils ne parviennent pas à trouver une construction de $\sqrt[3]{2}$ à la règle et au compas.
Là où les puristes échouaient, d'autres géomètres proposèrent des solutions : celle de Dioclès (env. 180 av. J.C.) utilise une courbe auxiliaire, la cissoïde (qui signifie " en forme de lierre ") que l'on doit construire point par point.
Peu à peu, les géomètres acquirent la certitude de l'impossibilité de trouver une solution avec une règle et un compas. Mais il fallut attendre près de 2000 ans pour que cette impossibilité soit démontrée par la théorie de Galois. On était en 1830.

a) **Construire avec Cabri la cissoïde** par sa définition géométrique suivante : (dans un RON $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$)

A partir du cercle C de diamètre [OI] et de la droite d tangente à ce cercle en I :
- construire un point N du cercle C, puis la droite (ON) , puis $M \in (ON) \cap d$;
- construire P tel que $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{PM}$.
L'ensemble des points P obtenus lorsque N parcourt le cercle C est la cissoïde de Dioclès.

Construction de $\sqrt[3]{2}$:
Sur la parallèle à d passant par O (ici l'axe (OJ)), construire le point J' tel que OJ' = 2 OI ;
la droite (IJ') coupe la cissoïde au point K.
Alors la droite (OK) coupe d en un point L tel que

$$\boxed{IL = OI \cdot \sqrt[3]{2}}$$



b) Soit $\alpha = \measuredangle(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OP})$ et $t = \tan(\alpha)$, démontrer que la représentation paramétrique de la cissoïde est

donnée par $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$;

puis étudier cette courbe.

c) Donner une équation cartésienne de cette courbe Γ ;

d) Calculer l'aire de la surface délimitée par Γ et par son asymptote.

3) Etudier la courbe Γ donnée par sa représentation paramétrique suivante : $\begin{cases} x = \dfrac{\ln(t)}{t} \\ y = t\ln(t) \end{cases}$.