Chapitre 1 - Représentation d'une courbe

§1 Représentation paramétrique d'une courbe

1.1 Introduction

❑ *Définition*

Soit un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan $\mathbb{P}$.

Une courbe Γ du plan $\mathbb{P}$ est un ensemble de points vérifiant une propriété.

Soit f une fonction, si $\Gamma = \{M(x\,;y) \in \mathbb{P} \mid y = f(x)\}$, on appelle Γ le graphique de la fonction f et on le note Γ_f .

Définition :

Soit φ et ψ deux fonctions définies sur une même partie D de $\mathbb{R}$; l'ensemble des points M(x ;y) dont les coordonnées cartésiennes x et y vérifient :

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in D$ est une courbe plane Γ . Ces équations sont appelées **équations paramétriques** de Γ , la variable **t** étant le **paramètre** .

On dit aussi que ces deux équations définissent une **représentation paramétrique** de la courbe Γ .

Remarques :

1) Une courbe Γ donnée admet une infinité de représentations paramétriques.
2) Une courbe donnée par son équation cartésienne y = f(x) admet le représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, t \in D_f$

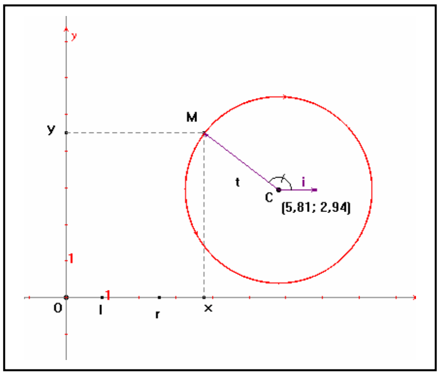
❑ *Exemples*

1) La droite : on a vu au cours de géométrie analytique plan que la droite d passant par le point $P(x_o\,;y_o)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ admet la représentation paramétrique $\begin{cases} x = x_0 + t\cdot\alpha \\ y = y_0 + t\cdot\beta \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$.

2) Le cercle $\mathcal{C}$ ($C(\alpha\,;\beta)$, r) de centre $C(\alpha\,;\beta)$ et de rayon r admet l'équation cartésienne $\boxed{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2}$

si l'on pose la représentation paramétrique $\begin{cases} x = \alpha + r\cos(t) \\ y = \beta + r\sin(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$,

on a $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = [r\cos(t)]^2 + [r\sin(t)]^2 = r^2$,
le paramètre t est une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}\,, \overrightarrow{CM})$,
où M désigne un point quelconque du cercle .



1.2 Elimination du paramètre

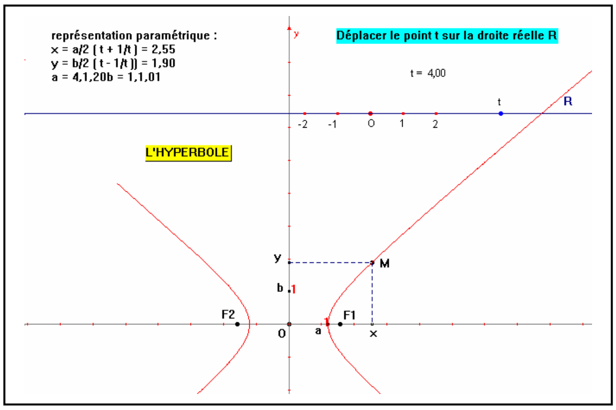
Lorsqu'une courbe plane Γ est définie par sa représentation paramétrique, on peut souvent déterminer son équation cartésienne en éliminant le paramètre entre les deux équations paramétriques de la courbe.

Exemple 1 : Soit la courbe Γ_1 définie par $\begin{cases} x = \varphi(t) = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) & (1) \\ y = \psi(t) = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) & (2) \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(a\,;b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$;

On peut écrire les équations (1) et (2) : $\begin{cases} \frac{2x}{a} = \left(t + \frac{1}{t}\right) & (1') \\ \frac{2y}{b} = \left(t - \frac{1}{t}\right) & (2') \end{cases}$, puis en additionnant et en soustrayant membre

à membre (1') et (2') on obtient : $\begin{cases} \frac{2x}{a} + \frac{2y}{b} = 2t & (3) \\ \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} = \frac{2}{t} & (4) \end{cases}$; on élimine alors le paramètre t en multipliant

membre à membre les équations (3) et (4) et obtient ainsi une équation cartésienne de la courbe Γ_1 :



$$\left(\frac{2x}{a} + \frac{2y}{b}\right) \cdot \left(\frac{2x}{a} - \frac{2y}{b}\right) = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad .$$

La courbe Γ_1 est une hyperbole .

1.3 Un exemple géométrique : la cycloïde

Soit un cercle Ω de rayon **a** qui roule sans glisser sur une droite immobile. La courbe Γ , ensemble décrit par un point M fixé sur le cercle Ω , s'appelle *une cycloïde*.

Prenons la droite (OI) sur laquelle roule le cercle Ω ; pour origine des coordonnées prenons la position initiale du point M, lorsqu'il est le point de tangence du cercle avec l'axe (OI) et soit t l'angle dont a tourné le cercle.

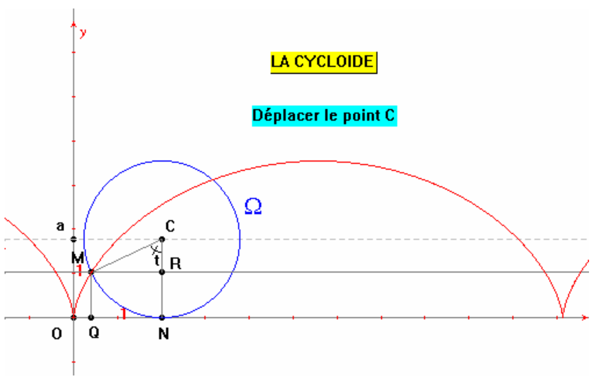
Soit C le centre du cercle Ω, N le point de tangence du cercle Ω avec l'axe (OI) , Q le projeté orthogonal de M sur (OI) et R le projeté orthogonal de M sur (CN).

Comme le cercle Ω roule sans glisser sur (OI), on a $\overline{ON} = \text{arc}\, NM = a \cdot t$

et on peut exprimer les coordonnées du point M qui décrit la cycloïde en fonction du paramètre $t = \widehat{NCM}$:

$x = \overline{OQ} = \overline{ON} - \overline{QN} = at - a\sin(t) = a\,(\,t - \sin(t)\,)$

$y = \overline{QM} = \overline{NC} - \overline{RC} = a - a\cos(t) = a\,(\,1 - \cos(t)\,)$



Ce qui donne la représentation paramétrique de la cycloïde.

1.4 Etude d'une courbe donnée par sa représentation paramétrique

- *Etude*

Pour construire une courbe plane Γ définie par ses équations paramétriques $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t \in D$,

on étudie simultanément les deux fonctions φ et ψ , et on établit le tableau des variations de x et de y en fonction du paramètre t . On traitera les points suivants :

1) le domaine $D = D_\varphi \cap D_\psi$
2) Si D est symétrique et si
   a) $\varphi(-t) = \varphi(t)$ et $\psi(-t) = -\psi(t)$, $\forall t \in D$, la courbe est symétrique par rapport à l'axe (OI) ;
   b) $\varphi(-t) = -\varphi(t)$ et $\psi(-t) = \psi(t)$, $\forall t \in D$, la courbe est symétrique par rapport à l'axe (OJ) ;
   c) $\varphi(-t) = -\varphi(t)$ et $\psi(-t) = -\psi(t)$, $\forall t \in D$, la courbe est symétrique par rapport à O .
3) les asymptotes : supposons que lorsque le paramètre t tend vers une valeur t_0 (ou vers l'infini), l'une ou moins des coordonnées x ou y tend vers l'infini. On a les trois possibilités suivantes (où a et b sont des nombres réels) :
   * si $x \to a$ et $|y| \to +\infty$, alors la courbe admet l'asymptote verticale d'équation $\boxed{x = a}$;
   * si $|x| \to +\infty$ et $|y| \to b$, alors la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation $\boxed{y = b}$;
   * si $|x| \to +\infty$ et $|y| \to +\infty$, alors la courbe peut admettre une direction asymptotique ou une asymptote affine d'équation cartésienne $\boxed{y = mx + h}$, si celle-ci existe, les coefficients a et b sont donnés par :

$$m = \lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \qquad \text{et} \qquad h = \lim_{t \to t_0} \left[\psi(t) - m \cdot \varphi(t) \right].$$

4) Trouver les points particuliers correspondant à des valeurs remarquables du paramètre t, ainsi que les tangentes en ces points.

   La pente de la tangente à la courbe Γ en un point est défini par : $m = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

   Les points pour lesquels on a $\varphi'(t) = \psi'(t) = 0$ sont des points singuliers.

5) Déterminer les points d'inflexion éventuels en calculant : $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\varphi'(t) \cdot \psi''(t) - \varphi''(t) \cdot \psi'(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^3}$

preuve :
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{1}{\varphi'(t)}$$

soit
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \psi'(t)\,\varphi''(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^2} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \psi'(t)\,\varphi''(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^3}$$

La courbe Γ admet des points d'inflexion s'il existe des valeurs t_0 du paramètre t

telles que $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ s'annule en changeant de signe,

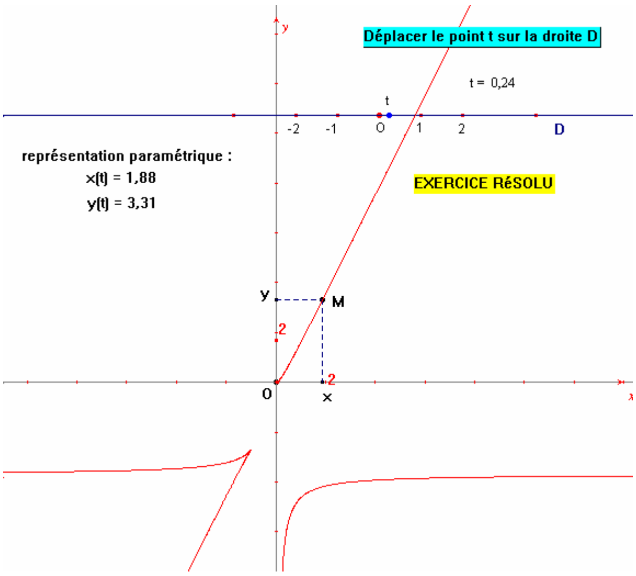
c'est-à-dire si le numérateur $\varphi'(t) \cdot \psi''(t) - \varphi''(t) \cdot \psi'(t) = 0$, avec $\varphi'(t) \neq 0$, pour $t = t_0$.

- *Exercice résolu*

Soit à étudier et à représenter graphiquement la courbe plane Γ donnée par sa représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t\,(t+2)} \\ y = \dfrac{e^{-t}}{t} \end{cases}$$

Solution :



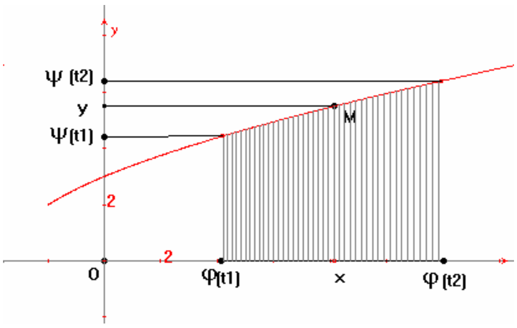
1.5 Aire d'une surface délimitée par une courbe en représentation paramétrique

Soit une courbe plane Γ donnée par ses équations paramétriques

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \; t \in D$$

On a dx = φ'(t) dt   et   y = ψ(t) ; ainsi l'aire de la surface délimitée par l'axe (OI), les verticales x = a et x = b et la courbe Γ ,
si a = φ(t1) et b = φ(t2) , est donnée par

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt \right|$$



Exercice : Calculer l'aire de la surface sous un arc de cycloïde.

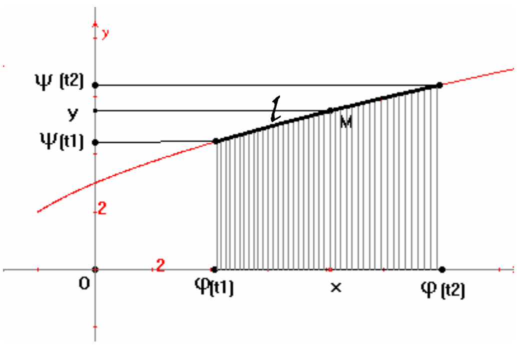
1.6 Longueur d'un arc de courbe en représentation paramétrique

Soit une courbe plane Γ donnée par ses équations paramétriques

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \; t \in D$$

On a dx = φ'(t) dt   et $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$; ainsi la longueur ℓ de l'arc de courbe délimitée par les verticales x = a et x = b ,
si a = φ(t1) et b = φ(t2) , est donnée par

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\; dt$$



Exercice : Calculer la longueur d'un arc de cycloïde.

1.7 Volume d'un corps de révolution

1.7.1 Soit une courbe plane Γ donnée par ses équations paramétriques $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t \in D$.

On a : $dx = \varphi'(t)\,dt$;

ainsi le volume $\mathcal{V}$ du corps de révolution obtenue en faisant tourner autour de l'axe (OI) la surface délimitée par l'axe (OI), la courbe Γ et par les verticales x = a et x = b , si a = φ(t1) et b = φ(t2) , est donnée par

$$\mathcal{V} = \pi \int_{t_1}^{t_2} [\psi(t)]^2 \cdot \varphi'(t)\ dt$$

Exercice : Calculer le volume du corps engendré par la révolution autour de (OI) d'un arc de cycloïde.

1.7.2 Soit une courbe plane Γ donnée par ses équations paramétriques $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t \in D$.

On a : $dx = \varphi'(t)\,dt$;

ainsi le volume $\mathcal{V}$ du corps de révolution obtenue en faisant tourner autour de l'axe (OJ) la surface délimitée par l'axe (OI), la courbe Γ et par les verticales x = a et x = b , si a = φ(t1) et b = φ(t2) , est donnée par

$$\mathcal{V} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \cdot \psi(t) \cdot \varphi'(t)\,dt$$