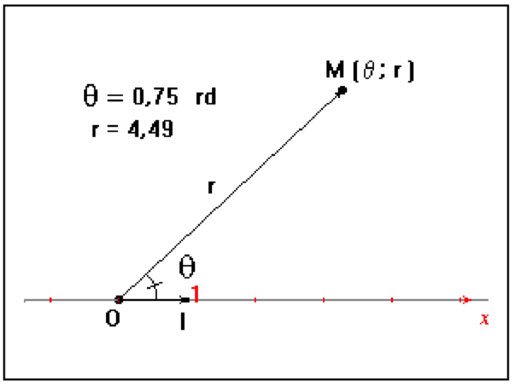
Chapitre 1 - Représentation d'une courbe

§2 Représentation polaire d'une courbe

2.1 Coordonnées polaires



Soit un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O , \vec{i} , \vec{j})$ du plan .

Un point M (distinct de O) du plan est entièrement déterminé par

1) la mesure $\dot{\theta}$ de l'angle $\sphericalangle(\vec{OI} ; \vec{OM})$,
2) la norme du vecteur $\vec{OM}$: $r = \| \vec{OM} \|$.

Définition :

Les deux nombres θ (avec $\theta \in \dot{\theta}$) et r sont appelés **coordonnées polaires** du point M ; on note M (θ ; r) .
θ est **l'argument** (ou **angle polaire**) du point M ;
r est le **rayon vecteur** (ou **rayon polaire**) du point M .

L'origine **O** est appelé **pôle** et l'axe (OI) **axe polaire** du système de coordonnées polaires .

remarques :
- Le pôle O est défini par la seule condition : r = 0 ; son argument θ étant arbitraire .
- Le couple (θ + π ; -r) est aussi un couple de coordonnées polaires du point M (θ ; r).
- Tous les couples de coordonnées polaires du point M sont donc donnés par :

$$(\theta + k2\pi \ ; r) \quad \text{ou} \quad (\theta + \pi + k2\pi \ ; -r) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

2.2 Relations avec les coordonnées cartésiennes

Soit M un point du plan distinct de O , (θ,r) ses coordonnées polaires et (x ;y) ses coordonnées cartésiennes.
On peut passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires par les formules :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

Le passage inverse est défini par les formules :

$$\left\{ r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \cos(\theta) = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array} \right.$$

On a encore : $\tan(\theta) = \dfrac{y}{x}$

2.3 Equation polaire d’une courbe

On notera **(θ , ρ)** un couple de coordonnées polaires d’un point M, où ρ désigne un nombre réel positif ou négatif (ρ = r ou ρ = -r).

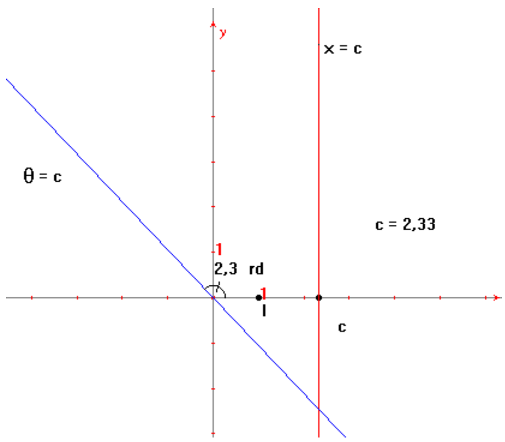
Définition :

Soit F une fonction des deux variables réelles θ et ρ. L’ensemble des points M du plan dont les coordonnées polaires θ et ρ satisfont à l’équation F (θ , ρ) = 0 est une courbe Γ du plan.
L’équation F (θ , ρ) = 0 est appelée **équation polaire** de la courbe Γ .

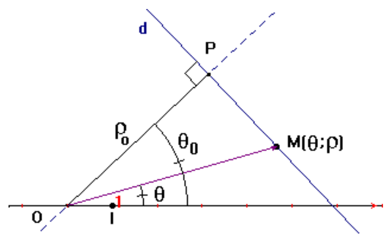
Tout point du plan admettant une double infinité de coordonnées polaires, une courbe peut être définie par deux équations polaires non équivalentes.

Exemple : Les deux équations non équivalentes : **ρ = a cos(θ) + b** et **ρ = a cos(θ) - b** (où a > 0 et b > 0) représentent la même courbe, appelée « limaçon de Pascal » (la seconde équation s’obtient en remplaçant dans la première θ par θ + π et ρ par -ρ).

2.4 <u>Equations polaires d’une droite et d’un cercle</u>

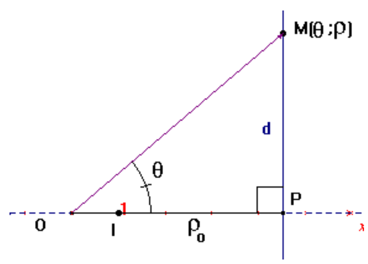


1) Une droite d’équation cartésienne x = c est l’ensemble des points M(c ;y) d’abscisse x = c constant et d’ordonnée y quelconque.
Une droite d’équation polaire θ = c est l’ensemble des points M(c ;r) d’angle polaire θ = c constant et de rayon polaire r quelconque.
Cette droite passe par le pôle O de rayon polaire r = 0.



Une droite d ne passant pas par le pôle O est entièrement déterminée par les coordonnées (θ_0 ;ρ_0) de son point d’intersection P avec la perpendiculaire p abaissée du pôle sur elle.

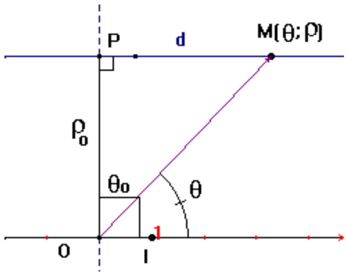
On a $\cos(\theta_0 - \theta) = \dfrac{\rho_0}{\rho} \Leftrightarrow \rho = \dfrac{\rho_0}{\cos(\theta - \theta_0)}$



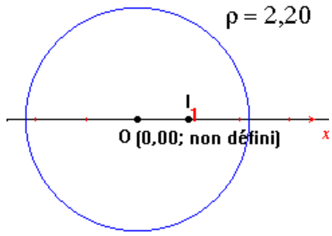
- Si la droite d est perpendiculaire à l’axe polaire, on a $\theta_0 = 0$ et l’équation devient : $\rho = \dfrac{\rho_0}{\cos(\theta)}$;

- Si la droite d est parallèle à l’axe polaire, on a $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$

  et l’équation devient : $\rho = \frac{\rho_0}{\sin(\theta)}$

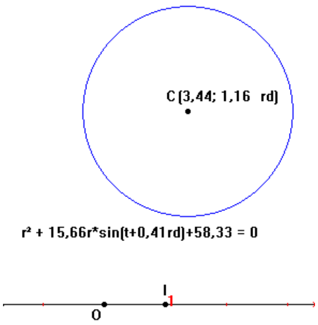


2) Une droite d’équation cartésienne y = c est l’ensemble des points M(x ;c) d’ordonnée y = c constant et d’abscisse x quelconque.
L’ensemble des points M(θ ; R) de rayon polaire ρ = R constant et d’angle polaire θ quelconque est le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R. Son équation polaire est ρ = R ou ρ = -R .



Si le cercle $\mathcal{C}$ est de centre $C(\theta_0 ;\rho_0)$ et de rayon R :
a) Calculer la distance $\delta(M_1;M_2)$ si $M_1(\theta_1;\rho_1)$ et $M_2(\theta_2;\rho_2)$.
b) En déduire une équation polaire de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} : \rho^2 - 2\rho_0\rho\cos(\theta - \theta_0) + \rho_0^2 - R^2 = 0 .$$

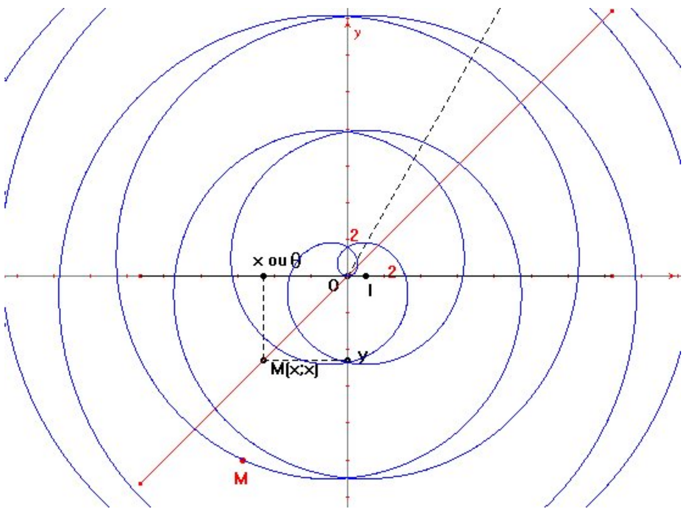


2.5 Présentation de quelques courbes de fonctions élémentaires

Equation cartésienne y = f(x)	Equation polaire ρ = f(θ)

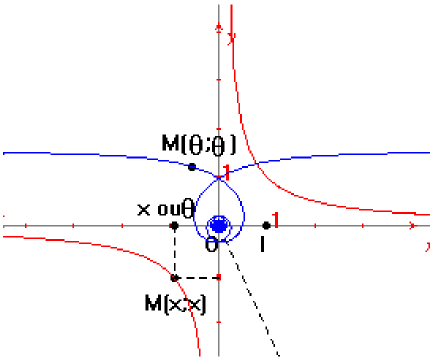
1) La fonction identité définie par y = x :
$\Gamma_f = \{M(x ;y) \in \quad | y = x\}$ est une droite

La fonction polaire définie par ρ = θ :
$\Gamma_f = \{M(\theta ;\rho) \in \quad | \rho = \theta\}$ est une spirale d’Archimède



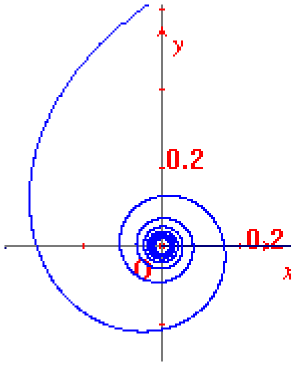
2) La fonction inverse définie par $y = \dfrac{1}{x}$:

$\Gamma_f = \{M(x\,;y) \in \quad | \; y = \dfrac{1}{x}\}$ est une hyperbole



La fonction polaire définie par $\rho = \dfrac{1}{\theta}$:

$\Gamma_f = \{M(\theta\,;\rho) \in \quad | \; \rho = \dfrac{1}{\theta}\}$ est une spirale hyperbolique

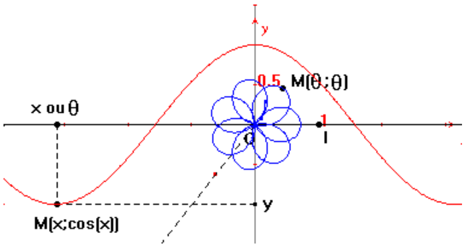


3) La fonction quadratique définie par $y = \cos(x)$:

$\Gamma_f = \{M(x\,;y) \in \quad | \; y = \cos(x)\}$ est une sinusoïdale

La fonction polaire définie par $\rho = \cos(\theta)$:

$\Gamma_f = \{M(\theta\,;\rho) \in \quad | \; \rho = \cos(\theta)\}$ est une rosace



2.6 Etude d'une courbe donnée par une équation polaire

Soit à étudier et à représenter graphiquement une courbe plane donnée par une équation polaire $\rho = f(\theta)$.

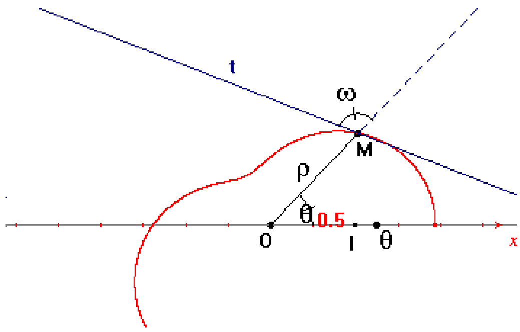
On procède de la même manière que pour une courbe donnée par son équation cartésienne, mais en calculant de plus l'angle que forme une tangente en un point quelconque de la courbe avec le rayon-vecteur de ce point. On traitera notamment les questions suivantes :

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f et sa périodicité éventuelle.
2) Observer si la courbe admet un axe ou un centre de symétrie. Par exemple :
   a) si $f(-\theta) = f(\theta)$ pour tout $\theta \in D_f$: la courbe est symétrique par rapport à l'axe polaire (OI) ;
   b) si $f(-\theta) = -f(\theta)$ pour tout $\theta \in D_f$: la courbe est symétrique par rapport à l'axe (OJ), où $J(\frac{\pi}{2}\,;1)$;
   c) si $f(\theta+\pi) = f(\theta)$ pour tout $\theta \in D_f$: la courbe admet le pôle O comme centre de symétrie .
3) Soit $M(\theta;\rho)$ un point quelconque de la courbe et **t** la tangente à la courbe en ce point.

   Nous admettons le théorème suivant :
   Si nous désignons par ω la mesure de l'angle ($\overrightarrow{OM}$; t) comprise entre 0 et π , alors on a :

$$\tan(\omega) = \frac{f(\theta)}{f\,'(\theta)} .$$

   La tangente en tout point de la courbe est déterminée par la connaissance de l'angle ω .



D'autre part, la relation ci-dessus permet de déterminer, s'ils existent, les points de la courbe admettant une tangente horizontale ou une tangente verticale :

a) On a une tangente horizontale si $\omega = (\pi - \theta) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

c'est à dire : $\mathbf{tan(\omega) = -tan(\theta)}$;

b) On a une tangente verticale si $\omega = (\frac{\pi}{2} - \theta) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

c'est à dire : $\mathbf{tan(\omega) = cot(\theta)} = \dfrac{1}{\tan(\theta)}$;

4) Si, pour une valeur de θ_0 de l'angle polaire, on a $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} |f(\theta)| = +\infty$,

la courbe peut admettre une asymptote rectiligne :

a) la courbe admet une asymptote verticale d'équation cartésienne x = a si

$\lim\limits_{\theta \to \theta_0} f(\theta) \cdot \cos(\theta) = a$ existe ;

b) la courbe admet une asymptote horizontale d'équation cartésienne y = b si

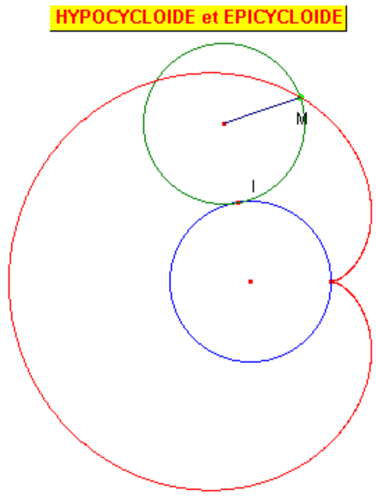
$\lim\limits_{\theta \to \theta_0} f(\theta) \cdot \sin(\theta) = b$ existe ;

c) la courbe admet une asymptote affine d'équation y = ax+b si

$a = \lim\limits_{\theta \to \theta_0} \tan(\theta)$ $\qquad b = \lim\limits_{\theta \to \theta_0} f(\theta) \left[\sin(\theta) - a \cdot \cos(\theta)\right]$

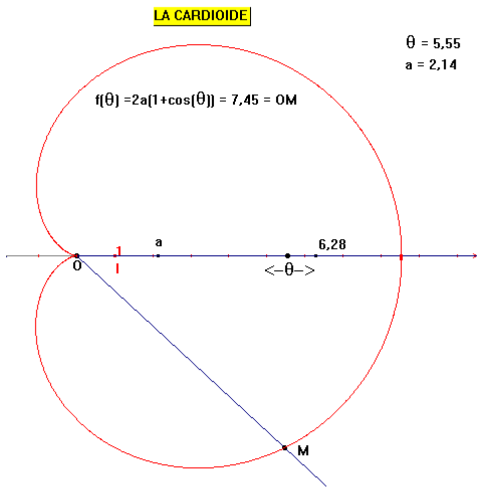
2.6 Exercice résolu : La cardioïde

Le nom de cette courbe a été donné par Castillon (1741). Cette courbe peut être générée par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur un cercle fixe de même rayon. Elle est un cas particulier des épicycloïdes (et hypocycloïdes).

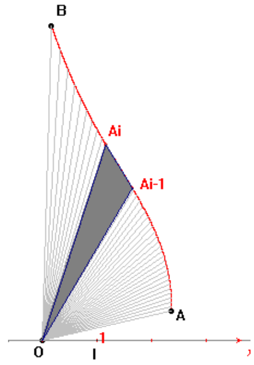


Si le cercle fixe est de rayon **a** , une équation polaire de la cardioïde est :

$$\rho = 2a\,(1+\cos(\theta))$$



2.7 Aire d'un secteur de courbe donnée par son équation polaire



Soit une courbe Γ d'équation polaire $\rho = f(\theta)$ et f continue ;
soit $A(\theta_1;\rho_1) \in \Gamma$ et $B(\theta_2;\rho_2) \in \Gamma$ et soit $\mathcal{D}$n un partage de $[\theta_1 ; \theta_2]$
en n intervalles. Considérons le secteur curviligne $OA_{i-1}A_i$ avec $\delta(A_{i-1},A_i) \approx \text{arc}A_{i-1}A_i$;
l'aire du triangle OA_{i-1},A_i est égale à

$$\mathcal{A}_i = \frac{1}{2}\cdot\rho_{i-1}\rho_i \sin(\theta_i - \theta_{i-1}) = \frac{1}{2}\cdot\rho_{i-1}\rho_i \frac{\sin(\theta_i - \theta_{i-1})}{\Delta\theta_i}\Delta\theta_i \quad \text{où } \Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$$

L'aire $\mathcal{A}$ du secteur OAB vaut alors :

$$\mathcal{A} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{A}_i = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\rho_{i-1}\rho_i\frac{\sin(\theta_i - \theta_{i-1})}{\theta_i - \theta_{i-1}}\Delta\theta_i \;;$$

or f est continue sur $[\theta_{i-1} ; \theta_i]$ et $f(\theta_{i-1}) < \sqrt{f(\theta_{i-1})\cdot f(\theta_i)} < f(\theta_i)$,

donc $\exists\, \xi_i \in [\theta_{i-1} ; \theta_i]$ tel que $f(\xi_i) = \sqrt{f(\theta_{i-1})\cdot f(\theta_i)}$ *(thm de la valeur intermédiaire)* ;

d'où
$$\mathcal{A} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\rho_{i-1}\rho_i\frac{\sin(\theta_i - \theta_{i-1})}{\theta_i - \theta_{i-1}}\Delta\theta_i = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}f(\theta_{i-1})f(\theta_i)\frac{\sin(\theta_i - \theta_{i-1})}{\theta_i - \theta_{i-1}}\Delta\theta_i =$$
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}f^2(\xi_i)\frac{\sin(\theta_i - \theta_{i-1})}{\theta_i - \theta_{i-1}}\Delta\theta_i = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}f^2(\theta)\cdot 1\cdot d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2\cdot d\theta$$

2.8 Longueur d'un arc de courbe donnée par son équation polaire

Soit une courbe Γ d'équation polaire $\rho = f(\theta)$ et f continue ; soit $A(\theta_1;\rho_1) \in \Gamma$ et $B(\theta_2;\rho_2) \in \Gamma$.

On a
$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(\theta)\cos(\theta) \\ y = f(\theta)\sin(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx = \left[f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta)\right] d\theta \\ dy = \left[f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)\right] d\theta \end{cases}$$

D'où l'élément différentiel de longueur $ds^2 = dx^2 + dy^2 = [f^2(\theta)+f'^2(\theta)]\, d\theta^2$.

$$\text{Ainsi la longueur de l'arc AB} = \boldsymbol{\ell} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}\; d\theta$$

Exemple : Calculer la longueur d'une spire de la **spirale d'Archimède** d'équation polaire $\rho = f(\theta) = \theta$

$$\boldsymbol{\ell} = \int_0^{2\pi}\sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}\; d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{\theta^2+1}\; d\theta = \left[\frac{1}{2}\left[\ln\left(\sqrt{\theta^2+1}+\theta\right)+\theta\right]+\frac{1}{2}\theta\sqrt{\theta^2+1}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left[\ln\left(\sqrt{4\pi^2+1}+2\pi\right)+2\pi\right]+\pi\sqrt{4\pi^2+1}\right] \cong 21{,}26 \text{ [u.}\boldsymbol{\ell}\text{.]}$$