ET L'ORDRE DANS $\mathbb{C}$?

Pour terminer, une petite remarque concernant l'ordre. Nos "spécifications" pour construire $\mathbb{C}$ était qu'il contienne $\mathbb{R}$ et un élément i tel que $i^2 = -1$, et que l'on puisse munir $\mathbb{C}$ d'une structure de corps dont l'addition et la multiplication prolongent les opérations correspondantes de $\mathbb{R}$.

Nous aurions également pu demander que $\mathbb{C}$ soit muni d'une relation d'ordre total qui prolonge l'ordre habituel des réels. Cela aurait été possible : il aurait par exemple suffi de munir $\mathbb{C}$ de l'ordre que l'on appelle *ordre lexicographique* (ou encore *ordre du dictionnaire*) :

$$a + bi \preccurlyeq c + di \quad \text{ssi} \quad (a < c) \text{ ou } (a = c \text{ et } b \leqslant d).$$

On peut vérifier que c'est bien une relation d'ordre total :

- $\preccurlyeq$ est réflexive : $\forall z \in \mathbb{C}\ z \preccurlyeq z$;
- $\preccurlyeq$ est antisymétrique : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\ (z_1 \preccurlyeq z_2 \text{ et } z_2 \preccurlyeq z_1) \Rightarrow z_1 = z_2$;
- $\preccurlyeq$ est transitive : $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\ (z_1 \preccurlyeq z_2 \text{ et } z_2 \preccurlyeq z_3) \Rightarrow z_1 \preccurlyeq z_3$;
- $\preccurlyeq$ est totale : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\ z_1 \preccurlyeq z_2$ ou $z_2 \preccurlyeq z_1$.

De plus, $\preccurlyeq$ prolonge la relation d'ordre habituelle de $\mathbb{R}$: $a + 0i \preccurlyeq c + 0i$ ssi $a \leqslant c$.

Mais un ordre total qui ne fait que prolonger l'ordre habituel des réels n'est pas intéressant, en pratique. En effet, on voudrait également que cet ordre se comporte comme celui de $\mathbb{R}$ par rapport à l'addition et à la multiplication. C'est-à-dire que l'on voudrait que cet ordre satisfasse les *axiomes des corps ordonnés :* pour tous $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$,

- (CO1) $\quad z_1 \preccurlyeq z_2$ implique $z_1 + z \preccurlyeq z_2 + z$,
- (CO2) $\quad z_1 \succcurlyeq 0$ et $z_2 \succcurlyeq 0$ implique $z_1 z_2 \succcurlyeq 0$.

Cela n'est pas le cas pour l'ordre $\preccurlyeq$ que nous venons de définir. En effet, par définition de cet ordre, $i \succcurlyeq 0$. Donc, à cause de (CO2), $-1 = i \cdot i \succcurlyeq 0$, ce qui n'est pas possible car, toujours par définition de l'ordre, $-1 \preccurlyeq 0$.

On pourrait bien entendu s'y prendre autrement pour définir un ordre sur $\mathbb{C}$. Mais cela n'arrangerait rien ! En effet, nous allons démontrer qu'il ne peut exister d'ordre total sur $\mathbb{C}$ qui satisfasse les axiomes des corps ordonnés, même si l'on n'exige pas que cet ordre prolonge l'ordre des réels.

Pour démontrer cette propriété, procédons par l'absurde et supposons que $\sqsubseteq$ soit un ordre total sur $\mathbb{C}$ qui vérifie les deux axiomes des corps ordonnés, (CO1) et (CO2). Cet ordre étant total, il y a deux cas :

- ou bien $i \sqsupseteq 0$, et alors $i^2 \sqsupseteq 0$ par (CO2),
- ou bien $i \sqsubseteq 0$, et alors $0 = i + (-i) \sqsubseteq 0 + (-i) = -i$ par (CO1) ; donc $i^2 = (-i)^2 \sqsupseteq 0$, par (CO2).

Dans tous les cas, $-1 = i^2 \sqsupseteq 0$ (ce qui ne pose pas de problème si l'on n'exige plus que $\sqsubseteq$ prolonge l'ordre habituel des réels).

De cette inégalité, on tire alors deux conséquences :

- $1 = (-1)^2 \sqsupseteq 0$ (par (CO2)), et
- $1 = 0 + 1 \sqsubseteq -1 + 1 = 0$ (par (CO1)).

Donc, $1 \sqsupseteq 0$ et $1 \sqsubseteq 0$. Comme un ordre est une relation anti-symétrique, on en conclut que $0 = 1$, ce qui est absurde, et implique l'impossibilité de l'existence d'un ordre total sur $\mathbb{C}$ qui vérifie les axiomes des corps ordonnés, même si l'on n'exige pas qu'il prolonge l'ordre usuel des réels.