INTRODUCTION AUX PROBABILITES [1]

Le problème des " partis "

Deux joueurs décident d'interrompre le jeu avant le terme convenu ; comment doivent-ils, suivant l'avancement de la partie, partager l'enjeu pour rester équitables ? Voici la solution qu'en donne Blaise Pascal dans une lettre qu'il écrivit le 29 juillet 1654 à Pierre de Fermat, conseiller au parlement de Toulouse :

« Voici à peu près comment je fais pour savoir la valeur de chacune des parties quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties et que chacun a mis 32 pistoles au jeu. Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie dont le sort est que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est en jeu, savoir 64 pistoles ; si l'autre la gagne, ils sont à deux parties, et par conséquent, s'il veulent se séparer , il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles. Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils ne veulent point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : " Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez ; le hasard est égal ; partageons donc les 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, les 32 pistoles qui me sont sûres." Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16. »

Le principal intérêt du jeu de hasard comme support expérimental d'une quantification réside dans l'existence d'un enjeu, somme qui le perdant devra remettre au gagnant. Pour un jeu déterminé, il était donc normal que se dégageât peu à peu une notion de juste prix : le célèbre «problème des partis », objet de la correspondance entre Pascal et Fermat que beaucoup tiennent pour l'acte de naissance du calcul des probabilités est un problème d'équité, discuté entre des juristes.

Imaginons qu'un organisateur de loterie, offrant un unique lot de 100 000 F, émet 1000 billets. Quel est le juste prix d'un billet ? Si, du point de vue de l'acquéreur, la question peut se discuter, du point de vue de l'organisateur, la réponse est simple (en négligeant les frais d'organisation) : s'il vend chaque billet 100 F, il a la certitude d'une opération équilibrée. Mieux encore, s'il les vendait moins cher, il se ruinerait rapidement et disparaîtrait du marché, tandis que s'il les vendait plus cher, des concurrents trouveraient avantage à organiser à leur tour une pareille loterie, et les lois du marché feraient baisser les prix du billet jusqu'à cette valeur d'équilibre. C'est ce type de raisonnement qui a conduit l'économiste Cournot à la présenter comme « la limite dont tend sans cesse à s'approcher, par les lois qui régissent le commerce libre, la valeur vénale des chances possédées par chaque prétendant à la chose ».

Le rapport du juste prix du billet, ici 100 F, à la valeur du lot à gagner, ici 100 000 F, égal à 0,001, représente la probabilité de gain, ce qui est conforme à notre intuition lorsqu'il y a un billet gagnant sur mille.

Cette mesure du hasard a une propriété simple, mais essentielle. C'est encore Cournot qui explique que, après qu'un bien a été mis en loterie, chacun des billets peut à son tour être considéré comme un bien : le juste prix de $m + n$ billets est la somme du juste prix de m billets et de celui de n billets. Si donc deux frères possèdent, l'un m billets et l'autre n, la probabilité que l'un ou l'autre gagne est la somme des probabilités de gain de chacun. Autrement dit, la probabilité de réalisation de l'un ou l'autre de deux événements *qui s'excluent mutuellement* est la somme des probabilités attachées à chacun.

Cette règle est la seule qui, en définitive, s'impose à tous. Les situations concrètes ont rarement la simplicité des jeux de hasard. Tout le monde peut s'accorder sur la probabilité de tirer un roi d'un jeu de cartes ou d'amener le double-six en jetant deux dés. Dans le réalité, il appartient à tout décideur d'apprécier les probabilités des diverses éventualités : il s'agit donc de probabilités subjectives, que deux décideurs différents pourront estimer différemment en fonction de l'ensemble des informations dont il disposent. Mais la règle d'additivité est nécessaire à la cohérence de tout système de probabilités.

A quoi bon un modèle ?

Des expressions telles que : peu probable, fortes chances, des phrases telles que : tentez votre chance, il a sept chances sur 10 d'être reçu, la loi des grands nombres montre que…, ou au contraire, la loi des séries laisse prévoir que…, font partie de la conversation courante. Mais face à l'incertitude, un décideur ne peut se contenter de formules aussi vagues : il doit prendre des décisions d'investissement, d'achat ou de vente, il doit autoriser ou non la mise sur le marché d'un médicament, il doit ou non maintenir sa candidature pour le second tour de l'élection.

Certes, il se trouve encore aujourd'hui des gens pour prétendre que tous les calculs ne servent à rien, que le bon sens suffit, et que d'ailleurs, mon père qui ignorait tout du calcul des probabilités a dirigé sont entreprise de main de maître pendant 50 ans. Ils sont de fait en bonne compagnie, puisque Laplace écrivait au XVIIIème siècle que «la théorie des probabilités n'est au fond que le bon sens réduit au calcul ; elle fait apprécier avec exactitude ce que les esprits justes sentent par une sorte d'instinct, sans qu'ils puissent souvent s'en rendre compte ».

Le domaine des probabilités est pourtant l'un de ceux dans lequel le bon sens peut se révéler le plus trompeur. Témoin les innombrables martingales « infaillibles » pour gagner aux jeux de hasard, témoin cette devinette pour se mettre en appétit :

Dans un collège britannique, les étudiants sont regroupés en maisonnettes de 25 chambres. L'usage veut que, dans toutes les maisonnettes, chaque étudiant offre une soirée le jour de son anniversaire ; quelle probabilité y a-t-il pour que ce soit impossible dans une maisonnette (par suite de la coïncidence des anniversaires de deux pensionnaires) ?

La réponse dictée par le bon sens doit tourner autour de une chance sur dix. Mais la réponse exacte est de deux chances sur trois (plus précisément 0,57…). Il est inutile d'appeler à la rescousse le calcul des primes d'assurances, vous voilà convaincus de la nécessité d'étudier le cours des probabilités.

Les lois de la pensée

Nous allons donc construire un modèle pour réduire le bon sens au calcul ; un modèle, c'est à dire un ensemble de définitions rigoureuses, qui permettent de faire des raisonnements déductifs. Et dès le début, les difficultés commencent : le modèle doit naturellement tenir compte de la réalité, et les définitions décrire du mieux possible ce que chacun «sent d'instinct ». Or, la probabilité se rapporte à un événement, et les définitions des dictionnaires pour ce mot *événement* ne sont que des paraphrases de son étymologie. Ce qui nous importe, c'est la construction d'un événement complexe à partir d'événements plus simples, ce sont les relations entre événements, leur compatibilité, leur indépendance, leur conjonction…

Cette exploration d'une notion aussi simple que celle d'événement n'a été entreprise , ce qui est pour le moins étonnant, qu'à une époque relativement proche de nous. C'est en effet, en 1849 que George Boole, professeur de mathématique au Queen's College de Cork, publia l'*Analyse mathématique de la logique*, dont il reprit et compléta le texte en 1853 sous le titre *Les lois de la pensée*. Aujourd'hui cette théorie est enseignée sous le titre de théorie des ensembles.

[1] Tiré de « Comprendre les probabilités » de Jean-Louis Boursin aux éditions Armand Colin.