§ 7. QUELQUES INTEGRALES GENERALISEES

7.1 INTERVALLE D'INTEGRATION NON BORNE

Nous avons défini jusqu'à maintenant $\int_a^b f(x)\,dx$ pour des limites (appelées aussi bornes) d'intégration $a\,,\ b \in \mathbb{R}$. Il est intéressant de lever cette restriction et de considérer des intégrales avec des "limites d'intégration infinies". Ce prolongement n'est possible que dans certains cas, moyennant quelques précautions, en utilisant les définitions qui suivent.

Définitions

1°) La borne supérieure d'intégration est infinie

Si f est continue sur $[a,\to[$, on pose par définition

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx}$$

pour autant que cette limite existe et soit finie.

On dit alors que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge ; si $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ n'existe pas ou est infinie, on dit que l'intégrale diverge.

2°) La borne inférieure d'intégration est infinie

Si f est continue sur $]\leftarrow,b]$, on pose par définition

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx}$$

pour autant que cette limite existe et soit finie.

3°) Les deux bornes d'intégration sont infinies

Si f est continue sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\,dx} \quad \text{où } c \in \mathbb{R}$$

pour autant que ces deux limites existent et soient finies.

7.2 LA FONCTION A INTEGRER EST DISCONTINUE

Envisageons maintenant le cas où la fonction à intégrer est discontinue pour des valeurs isolées de l'intervalle d'intégration.

1°) La fonction f est continue dans $]a,b]$ et discontinue en a. Dans ce cas on utilise la définition

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ >}} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx}$$

pour autant que cette limite existe et soit finie.

2°) f est continue dans $[a,b[$ et discontinue en b. On a alors, par définition :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ >}} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx}$$

si cette limite existe et est finie.

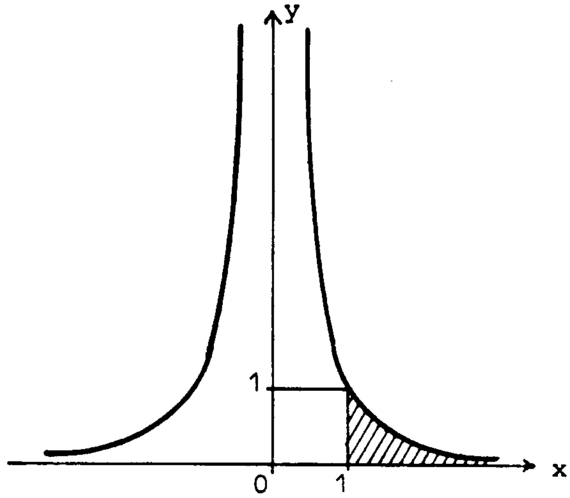
3°) f est continue dans $[a,b] - \{c\}$ où $c \in]a,b[$.
On pose alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ >}} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\substack{\varepsilon'\to 0\\ >}} \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx}$$

à la condition que ces deux limites existent et soient finies.

7.3 EXEMPLES

(1) Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

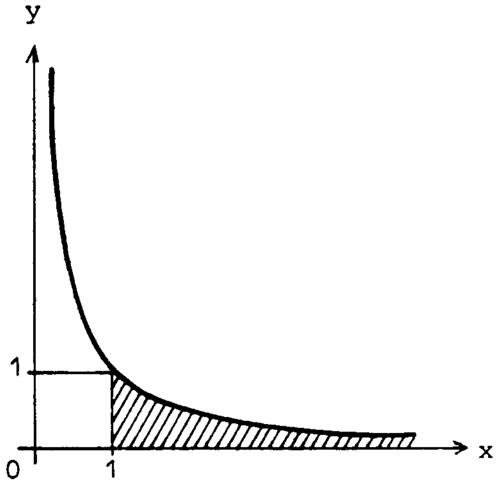


$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} =$$

$$\lim_{b \to +\infty} \left(- \frac{1}{x} \Big|_1^b \right) =$$

$$\lim_{b \to +\infty} \left(- \frac{1}{b} + 1 \right) = 1$$

(2) Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.



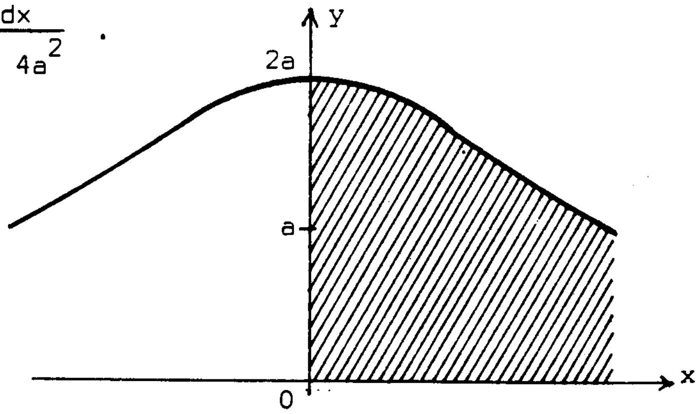
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} =$$

$$\lim_{b \to +\infty} \left(\ln x \Big|_1^b \right) =$$

$$\lim_{b \to +\infty} (\ln b) = + \infty$$

La limite n'étant pas finie, l'intégrale diverge.

(3) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{8a^3 \, dx}{x^2 + 4a^2}$.



$$\int_0^{+\infty} \frac{8a^3 \, dx}{x^2 + 4a^2} =$$

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{8a^3 \, dx}{x^2 + 4a^2} =$$

$$\lim_{b \to +\infty} \left(4a^2 \operatorname{Arc\,tg} \frac{x}{2a} \Big|_0^b \right) =$$

$$\lim_{b \to +\infty} \left(4a^2 \operatorname{Arc\,tg} \frac{b}{2a} \right) = 4a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 2 \pi a^2 .$$

(4) Calculer $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

La fonction à intégrer n'est pas définie pour $x = a$. On a :

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \left(\operatorname{Arc} \sin \frac{x}{a} \Big|_0^{a-\varepsilon} \right) =$$

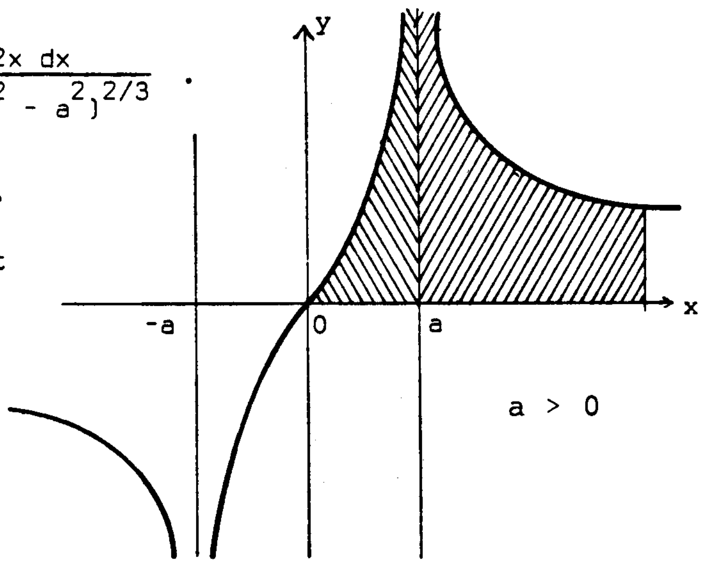
$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \left(\operatorname{Arc} \sin \left(1 - \frac{\varepsilon}{a}\right) \right) = \operatorname{Arc} \sin 1 = \frac{\pi}{2} .$$

(5) Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$. La fonction à intégrer n'est pas définie pour $x = 0$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \left(- \frac{1}{x} \Big|_\varepsilon^1 \right) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) = + \infty .$$

L'intégrale est donc divergente.

(6) Calculer $\int_0^{3a} \frac{2x \, dx}{(x^2 - a^2)^{2/3}}$.



Ici $ED(f) = \mathbb{R} - \{-a, a\}$.

La fonction considérée est donc continue dans $[0, 3a] - \{a\}$ et non définie pour $a \in \,]0, 3a[$.

Nous avons :

$$\int_0^{3a} \frac{2x \, dx}{(x^2 - a^2)^{2/3}} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{2x \, dx}{(x^2 - a^2)^{2/3}} + \lim_{\substack{\varepsilon' \to 0 \\ >}} \int_{a+\varepsilon'}^{3a} \frac{2x \, dx}{(x^2 - a^2)^{2/3}}$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \left(3 (x^2 - a^2)^{\frac{1}{3}} \Big|_0^{a-\varepsilon} \right) + \lim_{\substack{\varepsilon' \to 0 \\ >}} \left(3 (x^2 - a^2)^{\frac{1}{3}} \Big|_{a+\varepsilon'}^{3a} \right) =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \left(3 \sqrt[3]{(a - \varepsilon)^2 - a^2} + 3 \sqrt[3]{a^2} \right) + \lim_{\varepsilon' \to 0} \left(3 \sqrt[3]{8a^2} - 3 \sqrt[3]{(a + \varepsilon')^2 - a^2} \right)$$

$$= 3 \sqrt[3]{a^2} + 6 \sqrt[3]{a^2} = 9 \sqrt[3]{a^2}$$

Il peut paraître superflu de faire les calculs de limites ci-dessus puisqu'il semble que le calcul "sans précautions" donne le même résultat :

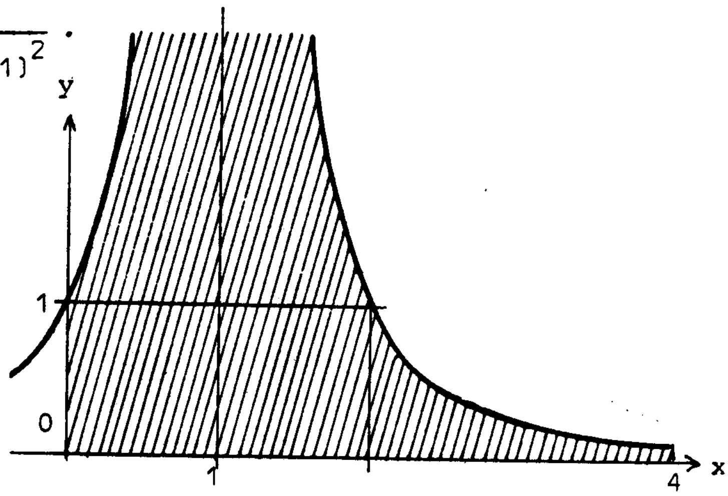
$$\int_0^{3a} \frac{2x\,dx}{(x^2 - a^2)^{2/3}} = 3\,(x^2 - a^2)^{\frac{1}{3}}\Big|_0^{3a} = 3\left(2\sqrt[3]{a^2} - (-\sqrt[3]{a^2})\right) = 9\,\sqrt[3]{a^2} \ .$$

L'exemple qui suit nous montre qu'une telle pratique n'est pas sans dangers.

(7) Calculer $\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

La fonction à intégrer est discontinue en $x = 1$.

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2} =$$



$$\lim_{\varepsilon \underset{>}{\to} 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon' \underset{>}{\to} 0} \int_{1+\varepsilon'}^{4} \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$\lim_{\varepsilon \underset{>}{\to} 0} \left(-\frac{1}{x-1}\Big|_0^{1-\varepsilon} \right) + \lim_{\varepsilon' \underset{>}{\to} 0} \left(-\frac{1}{x-1}\Big|_{1+\varepsilon'}^{4} \right) =$$

$$\lim_{\varepsilon \underset{>}{\to} 0} \left(-\frac{1}{-\varepsilon} - 1 \right) + \lim_{\varepsilon' \underset{>}{\to} 0} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) = +\infty$$

L'intégrale est donc divergente.

Remarque

Si, par inadvertance, on négligeait le point de discontinuité, on obtiendrait les incorrections suivantes :

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{-1}{x-1}\Big|_0^4 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3} \qquad (\ !\ )$$

7.4 EXERCICES

23) Calculer chaque fois que cela est possible les intégrales généralisées suivantes :

a) $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$

b) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

c) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$

d) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx$

e) $\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

f) $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,dx$

g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + 4x^2}$

h) $\int_{-\infty}^{0} x\,e^{x}\,dx$

i) $\int_{1}^{+\infty} \frac{-(x + 1)dx}{x^3}$ (poser $t = \frac{x+1}{x}$)

j) $\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

k) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{2 - x}$

l) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1 - \sin x}}$

m) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

n) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{(4 - x)^{3/2}}$

o) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

p) $\int_{a}^{2a} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

q) $\int_{-\infty}^{b} \frac{dx}{(4 - x)^2}$

r) $\int_{0}^{1} \ln x\,dx$

24) Evaluer l'aire limitée par

a) la courbe $y^2 = \frac{x^2}{1 - x^2}$ et ses asymptotes .

b) la courbe $y = \frac{1}{4 - x^2}$ et les droites $x = 2$, $x = -2$, $y = 0$

c) la courbe $y = \frac{1}{x^2 - x}$ et les droites $x = 3$, $y = 0$

(région située à droite de la droite $x = 3$) .