§6 INTEGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES

6.1 Décomposition en éléments simples

1.1 * Soit $Q(x)$ un polynôme à coefficients réels,

$$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

où $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 0, 1, \cdots, n$.

Il existe toujours une décomposition de $Q(x)$ formée de facteurs du type $(x-a)^n$ (où $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$), et de facteurs du type $(x^2+px+q)^m$ (où $p, q \in \mathbb{R}$ avec $p^2-4q<0$, $m \in \mathbb{N}^*$).

exemples : 1) $x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

2) $x^4+1 = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$

1.2 * Soit une fraction rationnelle de la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Alors on montre qu'elle peut se mettre sous la forme d'une somme comportant :

a) un polynôme (quotient de P par Q)

b) des fractions de la forme $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, dites éléments simples de première espèce

(où $A, B, C \in \mathbb{R}$)

c) des fractions de la forme $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)}$, dites éléments simples de seconde espèce.

remarque : le polynôme cité en a) peut être

- nul si $\deg P < \deg Q$
- constant si $\deg P = \deg Q$
- un polynôme de degré égal à la différence $\deg P - \deg Q$, si $\deg P > \deg Q$

1.3 * EXEMPLES :

1) Décomposer (en somme d'éléments simples) la fraction $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$

* On a $Q(x) = x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$

d'où $$\frac{P(x)}{Q(x)} = A + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

* Calcul de A, B et C : on met au même dénominateur :

$$\frac{x^2-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-3)+C(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

puis on égale les numérateurs :

$$x^2-1 = A(x-2)(x-3) + B(x-3) + C(x-2)$$

$$x^2-1 = Ax^2 + (-5A+B+C)\,x + (6A-3B-2C)$$

d'où $$\begin{cases} A = 1 \\ -5A+B+C = 0 \\ 6A-3B-2C = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = -3 \\ C = 8 \end{cases}$$

* On obtient ainsi la décomposition suivante :

$$\boxed{\frac{x^2-1}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{-3}{x-2} + \frac{8}{x-3}}$$

2) Décomposer $\dfrac{x^4+1}{x^3(x^2+x+1)}$ (ici le polynôme quotient sera nul, car $\deg P < \deg Q$)

alors $$\frac{x^4+1}{x^3(x^2+x+1)} = \underbrace{\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3}}_{\text{3 él. simples de première espèce}} + \underbrace{\frac{Dx+E}{x^2+x+1}}_{\text{1 él. simple de seconde espèce}}$$

* On met au même dénominateur le membre de gauche, puis on égale les numérateurs :

$$x^4+1 = Ax^2(x^2+x+1) + Bx(x^2+x+1) + C(x^2+x+1) + (Dx+E)x^3$$

$$x^4+1 = (A+D)x^4 + (A+B+E)x^3 + (A+B+C)x^2 + (B+C)x + C$$

d'où $\begin{cases} A+D = 1 \\ A+B+E = 0 \\ A+B+C = 0 \\ B+C = 0 \\ C = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = -1 \\ C = 1 \\ D = 1 \\ E = 1 \end{cases}$

* On obtient $\boxed{\dfrac{x^4+1}{x^3(x^2+x+1)} = \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{x+1}{x^2+x+1}}$

3) Décomposer $\dfrac{6}{x^6-1} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x-2}{x^2-x+1} - \dfrac{x+2}{x^2+x+1}$

4) Décomposer $y = \dfrac{4x^3-8x^2+16x-4}{(x-1)^3(x+1)(x^2+1)}$

alors $y = \dfrac{A}{(x-1)^3} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{(x-1)} + \dfrac{D}{(x+1)} + \dfrac{Ex+F}{x^2+1}$

d'où $4x^3-8x^2+16x-4 = A(x+1)(x^2+1) + B(x^4-1)$
$+ C(x-1)(x^4-1) + D(x-1)^3(x^2+1)$
$+ (Ex+F)(x-1)^2(x^2-1)$

pour simplifier le calcul de A, B, C, D, E et F, on utilise ici la méthode suivante :

On a :

$$4x^3-8x^2+16x-4 = A(x+1)(x^2+1)+B(x^4-1)+C(x-1)(x^4-1)+D(x-1)^3(x^2+1)+(Ex+F)(x-1)^2(x^2-1)$$

- Dans cette égalité, remplaçons x par 1 :

$$8 = 4A + 0 + 0 + 0 + 0$$

d'où $A = 2$

- Puis posons $x = -1$:

$$-32 = 0 + 0 + 0 + (-16)D + 0$$

d'où $D = 2$

- Puis remplaçons ds l'égalité initiale A par 2 et D par 2 :

$$4x^3-8x^2+16x-4 = 2(x+1)(x^2+1)+B(x^4-1)+C(x-1)(x^4-1)+2(x-1)^3(x^2+1)+(Ex+F)(x-1)^2(x^2-1)$$
$$=(2x^3+2x^2+2x+2)+\cdots+\cdots+(2x^5-6x^4+8x^3-8x^2+6x-2)$$
$$+(Ex+F)(x-1)^2(x^2-1)$$

$$-2x^5+6x^4-6x^3-2x^2+8x-4= B(x^4-1)+C(x-1)(x^4-1)+(Ex+F)(x-1)^2(x^2-1)$$
$$-2x^5+6x^4-6x^3-2x^2+8x-4 = (C+E)x^5+(B-C-2E+F)x^4+(-2F)x^3+(2E)x^2+(-C-E+2F)x$$
$$+(-B+C-F)$$

d'où
$$\begin{cases} C+E=-2 \\ B-C-2E+F=6 \\ -2F=-6 \\ 2E=-2 \\ (-C-E+2F)=8 \\ -B+C-F=-4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} B=0 \\ C=-1 \\ E=-1 \\ F=3 \end{cases}$$

réponse finale :

$$\boxed{y=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x-1)}+\frac{2}{x+1}-\frac{x-3}{x^2+1}}$$

6.2 Intégration des éléments simples

2.1 Eléments simples de première espèce

* Soit à calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$

a) si $n=1$: $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + c$

b) si $n \neq 1$: $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n}\,dx = \frac{1}{-n+1}(x-a)^{-n+1} + c$

$$= \frac{-1}{n-1}\,\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c$$

2.2 Eléments simples de seconde espèce

* Soit à calculer $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$ $\quad (A, B \in \mathbb{R})$ et $p^2-4q<0$

a) On procède ainsi : si $A=0$:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{B\,dx}{x^2+px+q}$$

or on peut toujours écrire : $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)$

$$= \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\left[\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2 + 1\right]$$

posons $t = \dfrac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}$$

d'où $\displaystyle\int \frac{B\,dx}{x^2+px+q} = \frac{B}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \int \frac{dt}{t^2+1}$

$$= \frac{B}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \cdot \operatorname{Arc\,tg} t \quad + C$$

$$= \frac{2B}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right) + C$$

$$= \frac{2B}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + C$$

c) <u>Maintenant : si $A \neq 0$:</u> on fait apparaître au numérateur la dérivée $(2x+p)$ du dénominateur :

$$Ax+B = \frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)$$

d'où $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}\,dx$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + C$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + C$$

2.3 Exemples :

① Soit à calculer $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+x+2}\,dx$

$$\int \frac{x+3}{x^2+x+2}\,dx = \int \frac{(x+\frac{1}{2})+\frac{5}{2}}{x^2+x+2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{5}{2}}{x^2+x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}\,dx + \underbrace{\int \frac{\frac{5}{2}\,dx}{x^2+x+2}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+2| + I + C$$

* Calcul de $I = \displaystyle\int \frac{\frac{5}{2}\,dx}{x^2+x+2}$

on a : $x^2+x+2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2-\frac{1}{4}\right) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

$$= \frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{7}{4} = \frac{1}{4}\left[(2x+1)^2+7\right] = \frac{7}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right]$$

en posant $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{7}}$; $dt = \dfrac{2}{\sqrt{7}}\,dx$

on a : $\displaystyle\int \frac{\frac{5}{2}\,dx}{x^2+x+2} = \int \frac{\frac{5}{2}\,dx}{\frac{7}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right]} = \frac{4}{7}\cdot\int \frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{\frac{5}{2}\,dt}{t^2+1}$

$$= \frac{5}{\sqrt{7}}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{5}{\sqrt{7}}\,\mathrm{Arc\,tg}\,t = \frac{5}{\sqrt{7}}\,\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)$$

finalement :

$$\int \frac{x+3}{x^2+x+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+2| + \frac{5}{\sqrt{7}}\,\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C$$

6.3 Série d'exercices sur l'intégration des fractions rationnelles.

Exercice 1 : Décomposer en éléments simples

1°/ $\dfrac{x+3}{2x^2-3x-2}$

2°/ $\dfrac{x-1}{3x^2-7x+2}$

3°/ $\dfrac{x^2-1}{x^3+2x^2-3x}$

4°/ $\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$

5°/ $\dfrac{x^3+1}{(x^2+1)(x^2+4)}$

6°/ $\dfrac{9}{(x-1)(x+2)^2}$

7°/ $\dfrac{x^3+3x^2-11x+12}{(x^2+1)(x-2)^2}$

8°/ $\dfrac{x^3+4x-1}{x^2-1}$

Exercice 2 : Calculer une primitive de chacune des fractions rationnelles de l'exercice 1.

Exercice 3 : Calculer les intégrales suivantes :

1°/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-x}{x+1}\,dx$

2°/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x-2)^2}\,dx$

3°/ $\displaystyle\int_2^3 \frac{4x}{x^4-1}\,dx$

4°/ $\displaystyle\int_3^6 \frac{x+7}{x^2-x-2}\,dx$

5°/ $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}\,dx$

6°/ $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^2+x}{(x+2)(x^2+2x+2)}\,dx$

7°/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-5x+7}$