COLLEGE DE L'ABBAYE ST-MAURICE

GEOMETRIE ANALYTIQUE
et
PRODUIT SCALAIRE

DANS LE PLAN

MATHEMATIQUE 3ème

1 Introduction

L'usage des vecteurs permet de transcrire les problèmes de géométrie liés au parallélisme (colinéarité), à l'othogonalité, aux questions métriques (distance, mesure des angles). Si l'on associe les vecteurs à un repère du plan, il est alors possible de traduire ces problèmes en termes de calcul algébrique dans **R**.

Un problème géométrique peut ainsi se traiter de trois façons: soit à l'aide des théorèmes de la géométrie, soit par des moyens vectoriels, soit par la méthode analytique. Cette dernière ramène la recherche des solutions des problèmes géométriques à la résolution d'équations ou d'inéquations. On parle alors de géométrie analytique, fort utile dans l'étude des courbes ou la détermination des lieux géométriques.

<u>Rappel</u>

1. Un repère du plan est un triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où $O \in \mathbb{P}$ et $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}_2$, l'ensemble des vecteurs du plan. Le point O se nomme origine du repère

2. Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on écrit $\overrightarrow{OM} = m_1 \cdot \vec{i} + m_2 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ et $M(m_1, m_2)$.

3. Si l'on a $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

4. Avec $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$, M milieu de $[P_1, P_2]$ $\Leftrightarrow$ $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2} \quad \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

5. Si $\vec{0} \notin \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\}$, alors $(AB) \parallel (CD)$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$

6. Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}_2$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$

7. Pour la norme, $\|x \cdot \vec{v}\| = |x| \cdot \|\vec{v}\|$

2 Vecteurs orthogonaux

Définition Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits **orthogonaux** si et seulement si l'un des deux est nul ou si $(AB) \perp (CD)$.

Notation: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

Selon la définition des vecteurs orthogonaux, on a

a) $\forall \{x, y\} \subset \mathbb{R}^* \quad \vec{0} \in \{\vec{u}, \vec{v}\} \iff \vec{0} \in \{x \cdot \vec{u}, y \cdot \vec{v}\}$

b) Si $\vec{0} \notin \{\vec{u}, \vec{v}\}$ et avec $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$ et $\{x, y\} \subset R^*$

alors $x \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AB'}$ et $B' \in (AB)$ et $y \cdot \vec{v} = \overrightarrow{CD'}$ et $D' \in (CD)$

$(AB') = (AB)$ et $(CD') = (CD)$

enfin $\forall \{x, y\} \subset \mathbb{R}^* \quad \vec{u} \perp \vec{v} \iff \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \iff (AB) \perp (CD)$

$(AB') \perp (CD') \iff \overrightarrow{AB'} \perp \overrightarrow{CD'}$

$\iff x \cdot \vec{u} \perp y \cdot \vec{v}$

On a alors la propriété suivante.

> Les multiples de deux vecteurs orthogonaux sont orthogonaux et réciproquement.
>
> $\forall \{x, y\} \subset \mathbb{R}^* \quad \vec{u} \perp \vec{v} \iff x \cdot \vec{u} \perp y \cdot \vec{v}$

Selon la définition des vecteurs orthogonaux, on a

a) Pour $\vec{0} \notin \{\vec{u}, \vec{v}\}$, avec $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ on a

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \quad \Leftrightarrow \quad (AB) \perp (BC)$$

$$\delta(A,C)^2 = \delta(A,B)^2 + \delta(B,C)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

b) Pour $\vec{u} = \vec{0}$, $\vec{0} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \|\vec{0} + \vec{v}\|^2 \quad \vec{0}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

c) Pour $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{u} \perp \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \|\vec{u} + \vec{0}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \quad \|\vec{0}\|^2$

On obtient ainsi pour les vecteurs une propriété analogue à celle de Pythagore pour le triangle rectangle.

$$\forall \{\vec{u}, \vec{v}\} \subset \mathcal{V}_2 \quad \vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Définition $\vec{i}, \vec{j}$) est une **base orthonormée** B.O.N. si et seulement si

$$\vec{\ } \perp \vec{\ } \quad \text{et} \quad \|\vec{i} = \vec{j}\| = 1$$

Par la propriété des multiples de vecteurs orthogonaux, on a $\vec{i} \perp \vec{j} \Rightarrow x\cdot\vec{i} \perp y\cdot\vec{j}$

Par "Pythagore", si $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned} \vec{v}\|^2 &= \|x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}\|^2 = \|x\cdot\vec{i}\|^2 + y\cdot\vec{j}\|^2 \\ &= x^2\|\vec{i}\|^2 + y^2\|\vec{j}\|^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ \|\vec{v} &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

On obtient ainsi, pour la norme d'un vecteur, le théorème suivant.

Dans une base orthonormée, si $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Définition Un **repère** $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit **orthonormé** (R.O.N.) si et seulement si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée.

Pour la distance de deux points, on a

> Dans un repère orthonormé, si $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ alors
>
> $$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \delta(A,B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Par le "théorème de Pythagore" et celui de la norme, pour $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $(\vec{i}, \vec{j})$ B.O.N.

on a

$$\begin{array}{rrcl}
\vec{u} \perp \vec{v} & \Leftrightarrow \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 & = & \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \\
 & (x + x')^2 + (y + y')^2 & = & (x^2 + y^2) + (x'^2 + y'^2) \\
\Leftrightarrow & x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 & = & (x^2 + y^2) + (x'^2 + y'^2) \\
\Leftrightarrow & 2xx' + 2yy' & = & 0 \\
\Leftrightarrow & xx' + yy' & = & 0 \\
\Leftrightarrow & \begin{vmatrix} x' & -y \\ y' & x \end{vmatrix} & = & 0 \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} & = & \lambda \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}
\end{array}$$

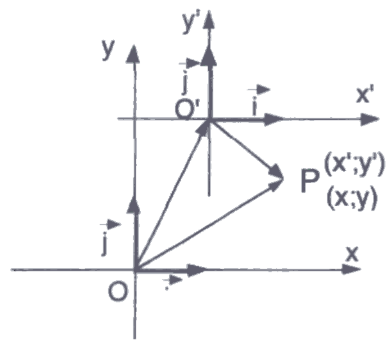
On obtient ainsi un critère d'orthogonalité de deux vecteurs.

> Dans une base orthonormée, si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors
>
> $$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad x x' + y y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

3 Changement de repère

3.1 Translation de l'origine

Définition Une translation de vecteur $\vec{v}$, dans le plan, est une application $t_{\vec{v}} : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ telle que $\forall A \in \mathbb{P}\ \left(A, t_{\vec{v}}(A)\right) \in \vec{v}$.



Soit le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.

Par une translation de vecteur $\vec{v}$, l'origine O devient O', de coordonnées (a;b) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

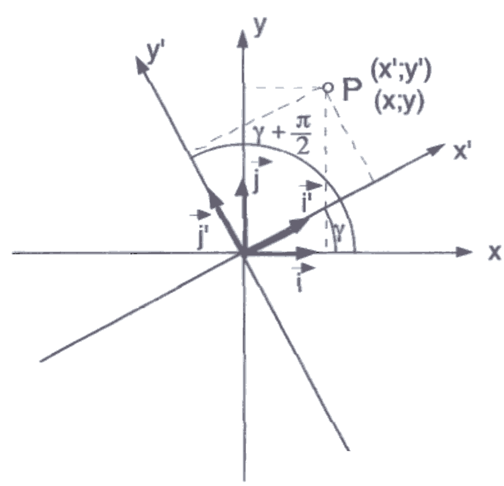
Quel que soit P de coordonnées (x;y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et de coordonnées (x';y') dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$ on a

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{v} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OP} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O'P} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j}$$

$$\text{et} \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + x' \\ b + y' \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}}$$

3.2 Rotation de centre O



Pour une rotation de centre O et d'angle de mesure γ, quel que soit P de coordonnées (x;y) dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (x';y') dans le R.O.N.D. $(O, \vec{i}', \vec{j}')$, on a

$$\overrightarrow{OP} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' \qquad \text{dans } (O, \vec{i}', \vec{j}').$$

Et dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a

$$\vec{i}' = \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{j}' = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} + \gamma) \\ \sin(\frac{\pi}{2} + \gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\gamma \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

Alors, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ $\quad \overrightarrow{OP} = x'\begin{pmatrix}\cos\gamma\\ \sin\gamma\end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix}-\sin\gamma\\ \cos\gamma\end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\cos\gamma - y'\sin\gamma\\ x'\sin\gamma + y'\cos\gamma\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = x'\cos\gamma - y'\sin\gamma \\ y = x'\sin\gamma + y'\cos\gamma \end{cases}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = x\cos\gamma + y\sin\gamma \\ y' = -x\sin\gamma + y\cos\gamma \end{cases}$$

4 La droite

4.1 Droite de vecteur directeur $\vec{d}$ passant par un point P_1

Soit un point $P_1(x_1, y_1)$ et un vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix}$. Alors avec $\vec{d} \neq \vec{0}$, la droite $d(P_1, \vec{d})$ passant par P_1 et de vecteur directeur $\vec{d}$ est l'ensemble des points P tels que

$d(P_1, \vec{d}) = \{P \in \mathbb{P} \quad \overrightarrow{P_1P} = k\vec{d} \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{R}$ Ainsi,

$$P(x;y) \in d(P_1, \vec{d})$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_1P} = k \cdot \vec{d}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_1P} \text{ et } \vec{d} \text{ colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & d_1 \\ y - y_1 & d_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad d_2x - d_1y = d_2x_1 - d_1y_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{d_2x - d_1y = d_2x_1 - d_1y_1} \qquad (1$$

On peut aussi exprimer l'équation (1) en écrivant tous les termes dans le membre de gauche

$$d_2x - d_1y + (-d_2x_1 + d_1y_1) = 0$$

Le nombre $-d_2x_1 + d_1y_1$ est constant. Donc à toute droite de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ est associée une équation du type

$$ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad (a,b) \neq (0,0) \qquad (2)$$

Et on a déjà démontré en 2ème année que $\{ M(x;y) \in P \mid ax + by + c = 0 \text{ et } b \neq 0 \}$ est une droite du plan. Alors l'**équation cartésienne** $ax + by + c = 0$ caractérise une droite du plan si $(a,b) \neq (0,0)$.

Remarque

On appelle **équation d'une courbe** une équation qui lie les coordonnées x et y de chaque point de la courbe.

4.2 Droite de pente m passant par un point P_1

Si la droite d est donnée par deux points distincts $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1,b_2)$, elle a pour vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$. Si $b_1 \neq a_1$, le rapport $m = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$ se nomme **coefficient directeur d**e la droite d.

Dans un repère orthonormé, si $d_1 \neq 0$, le nombre $\dfrac{d_2}{d_1} = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = m$ s'appelle **pente** de la droite.

Alors, si $d_1 \neq 0$, l'équation 1 peut aussi s'écrire $y - y_1 = \dfrac{d_2}{d_1}(x - x_1)$

et

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)} \qquad (3)$$

est une équation cartésienne d'une droite de pente m passant par un point P_1

4.3 Equation dite "explicite" - Fonction affine

Dans l'équation (3), on peut isoler y et l'on obtient

$$y = m(x - x_1) + y_1 \iff y = mx + (y_1 - mx_1)$$

$$\iff \boxed{y = mx + h} \quad \text{et } h = y_1 - mx_1 \qquad (4)$$

A tout x, on associe un et un seul y, on a une application affine f et $f(x) = mx + h$

Pour trouver l'intersection de cette droite avec le deuxième axe, on pose

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{et} \\ y = mx + h \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = h \end{cases}$$

h s'appelle "**ordonnée à l'origine**" de la droite.

4.4 Système d'équations paramétriques

A chaque point P du plan, on associe un et un seul nombre k tel que

$P(x;y) \in d(P_1, \vec{d}\,) \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P} = k \cdot \vec{d} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kd_1 \\ kd_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kd_1 \\ kd_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + kd_1 \\ y_1 + kd_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boxed{\begin{cases} x = x_1 + kd_1 \\ y = y_1 + kd_2 \end{cases} \text{ et } k \in \mathbb{R}} \qquad (5)$$

4.5 Droites particulières

Si la droite est parallèle à $d(O, \vec{i}\,)$, un vecteur directeur est colinéaire à , donc $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les équations paramétriques (5) deviennent $\begin{cases} x = x_1 + kd_1 \\ y = y_1 \end{cases}$ et $k \in \mathbb{R}$

Quel que soit k, c'est-à-dire quel que soit le point de la droite, l'ordonnée y est égale à l'ordonnée du point P_1 par lequel passe la parallèle à $d(O, \vec{i}\,)$.

Réciproquement, si $y = y_1$

les équations paramétriques (5) donnent $\begin{cases} x = x_1 + kd_1 \\ y_1 = y_1 + kd_2 \end{cases}$ et $k \in \mathbb{R} \Rightarrow d_2 = 0$

Alors, un vecteur directeur de la droite est $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, un vecteur colinéaire à $\vec{i}$ et la droite est parallèle à $d(O, \vec{i}\,)$.

Ainsi, l'équation $\boxed{y = y_1}$

caractérise une <u>parallèle à $d(O, \vec{i}\,)$</u>.

Si la droite est parallèle à $d(O, \vec{j}\,)$, un vecteur directeur est colinéaire à $\vec{j}$, donc $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix}$.

Les équations paramétriques (5) deviennent $\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 + kd_2 \end{cases}$ et $k \in \mathbb{R}$

Donc, quel que soit k, c'est-à-dire quel que soit le point de la droite, l'abscisse x est constante et égale à l'abscisse du point P_1 par lequel passe la parallèle à $d(O, \vec{j}\,)$.

Réciproquement, si $x = x_1$

les équations paramétriques (5) donnent $\begin{cases} x_1 = x_1 + kd_1 \\ y = y_1 + kd_2 \end{cases}$ et $k \in \mathbb{R} \Rightarrow d_1 = 0$

Alors, un vecteur directeur de la droite est $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix}$, un vecteur colinéaire à et la droite est parallèle à $d(O, \vec{j})$.

Ainsi, l'équation $\boxed{x = x_1}$

caractérise une <u>parallèle à $d(O, \vec{j})$.</u>

On retrouve une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ pour une parallèle à $(O, \vec{i})$ avec $a = 0$ et $b \neq 0$ et pour une parallèle à $d(O, \vec{j})$ avec $b = 0$ et $a \neq 0$.

4.6 Positions relatives de deux droites.

Soit $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

les équations cartésiennes de deux droites d_1 et d_2 .

Des vecteurs directeurs respectifs sont $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$

<u>Droites parallèles</u>

$d_1 \parallel d_2$ si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si le déterminant de leurs composantes est nul.

$$\boxed{d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -b_1 & -b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0}$$

<u>Droites sécantes</u>

Il résulte

$$\boxed{d_1 \cap d_2 = \{P\} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -b_1 & -b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0}$$

<u>Droites confondues</u>

Deux droites sont confondues, si elles sont parallèles et ont un point commun.

5 Droite normale à $\vec{n}$ passant par P_1

5.1 Equation cartésienne à l'aide d'un vecteur normal

Si d est une droite de vecteur directeur $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$, alors la droite **orthogonale** à d passant par $P_1(x_1,y_1)$ est $d_1 = \{M \in \mathbf{P} \ \ \overrightarrow{P_1M} \perp \vec{n}$ Le vecteur $\vec{n}$ est appelé **vecteur normal** de l'orthogonale.

Par le critère d'orthogonalité de deux vecteurs, la droite normale à $\vec{n}$ est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que

$$(x - x_1)\,n_1 + (y - y_1)\,n_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{n_1x + n_2y = n_1x_1 + n_2y_1}$$

C'est l'équation cartésienne de la droite normale à $\vec{n}$ passant par P_1.

5.2 Relations entre les coefficients et entre les pentes de deux droites orthogonales

Soit $\quad a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad$ et $\quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$

les équations cartésiennes de deux droites d_1 et d_2.

Leurs vecteurs normaux respectifs sont $\quad \vec{d}_1 = \begin{pmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Alors, selon le critère d'orthogonbalité, on a

$$\boxed{d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{d}_1 \perp \vec{d}_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0}$$

Si aucune des deux droites n'est verticale, les premières composantes des vecteurs directeurs $\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$ sont différentes de 0 et on a

$$\begin{aligned} d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{d}_1 \perp \vec{d}_2 \Leftrightarrow \quad & a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{a_1a_2}{b_1b_2} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{a_1}{-b_1} \cdot \frac{a_2}{-b_2} + 1 = 0 \\ & m_1m_2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1m_2 = -1}}$$

6 Produit scalaire

6.1 Définition et propriétés

On se rapportera toujours dans ce paragraphe à une base ou un repère orthonormé.

Le produit scalaire est une opération fixée par le théorème-définition suivant.

Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, alors la relation $\mathcal{R}$ de $\mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_2$ vers $\mathbf{R}$ telle que

$(\vec{a}, \vec{b})\ \mathcal{R}\ x \quad \Leftrightarrow \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 = x$ est une application appelée **produit scalaire.**

Notation: $\quad a_1 b_1 + a_2 b_2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$

Il découle de la propriété des vecteurs associés à une base, qu'à chaque vecteur correspond un couple unique de composantes; a_1, a_2, b_1, b_2 étant uniques, le nombre $x = a_1 b_1 + a_2 b_2$ existe et est unique et la relation est une application.

Remarque

Il convient de distinguer les trois types d'opérations suivants.

1. L'opération interne dans $\mathbb{R}$, de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ vers $\mathbb{R}$, produit des nombres réels.
2. L'opération externe, de $\mathbf{R} \times \mathcal{V}_2$ vers $\mathcal{V}_2$, produit des réels et des vecteurs
3. L'opération de $\mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_2$ vers $\mathbf{R}$, produit scalaire des vecteurs.

Par définition du produit scalaire, si $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, alors

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = v_1 u_1 + v_2 u_2 = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (u_1 + v_1) w_1 + (u_2 + v_2) w_2$

   $(u_1 w_1 + v_1 w_1) + (u_2 w_2 + v_2 w_2)$

   $\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
3. $(\lambda \vec{u} \quad \vec{v} = (\lambda u_1) v_1 + (\lambda u_2) v_2 = \lambda (u_1 v_1 + u_2 v_2) = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$
4. $\vec{v} \cdot \vec{v} = v_1^2 + v_2^2 \geq 0$

et le produit scalaire de deux vecteurs possède les propriétés suivantes.

Le produit scalaire est:

1. symétrique: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. additif dans le premier argument: $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
3. homogène dans le premier argument: $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$
4. positivement défini: $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$

<u>Remarques</u>:

1. On ne dit pas "commutatif" mais "symétrique" car l'opération n'est pas interne.
2. On ne dit pas "associatif" mais "homogène" car il y a deux produits différents.
3. Le produit scalaire est aussi additif et homogène dans le second argument.
4. Un produit (une application) additif et homogène est aussi dit linéaire.
5. Un produit (une application) additif et homogène dans les deux arguments est dit bilinéaire.
6. $(\vec{v})^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = v_1^2 + v_2^2 = \|\vec{v}\|^2$

   L'application f de $\mathcal{V}_2$ vers $\mathbb{R}_+$ définie par $f(\vec{v}) = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ est la norme sur $\mathcal{V}_2$ mentionnée au théorème sur la norme.
7. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x x' + y y' = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

   Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Selon la remarque 6, on a

$$\vec{u} + \vec{v} \|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u})^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + (\vec{v})^2$$

$$\|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \ \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \quad \vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

On peut ainsi calculer le produit scalaire de deux vecteurs aussi à l'aide de leurs normes et celle de leur somme.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Il s'en suit

Le produit scalaire est indépendant de la base orthonormée choisie.

6.2 Produit scalaire et projection orthogonale

Si $\vec{i}$ est un vecteur directeur unitaire de la droite d et (O,I) un repère d'une graduation g de d associée à la distance, alors $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $OI_g = 1$

Si $M \in d$, on a $\quad \overrightarrow{OM} = \alpha\,\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \overline{OM}_g = \alpha\,\overline{OI}_g = \alpha \cdot 1 = \alpha = g(M)$

Ainsi, si $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires, $\quad \overrightarrow{OM} = \overline{OM} \cdot \vec{i}$

Avec $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$ et $H = p_{\perp}(M)$ et $H \in d(O,\vec{i})$ on a

$$\vec{v}\cdot\vec{i} = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{i} = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM})\cdot\vec{i} = \overrightarrow{OH}\cdot\vec{i} + \overrightarrow{HM}\cdot\vec{i}$$

$$\overrightarrow{OH}\cdot\vec{i} + 0 \qquad \text{car} \quad \overrightarrow{HM} \perp \vec{i}$$

$$(\overline{OH}\cdot\vec{i})\cdot\vec{i} = \overline{OH}\,(\vec{i})^2 = OH \cdot 1 = OH$$

On peut alors énoncer le théorème suivant.

> Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{v}$ et d'un vecteur unitaire $\vec{i}$ est la mesure algébrique du projeté orthogonal sur $d(O,\vec{i})$ du bipoint $(O,M) \in \vec{v}$.

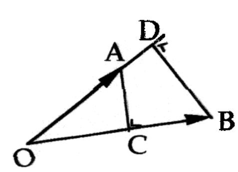
Si $\vec{0} \notin \{\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $C = p_{\perp}(A) \in (OB)$, $D = p_{\perp}(B) \in (OA)$, alors

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB} + 0$$



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD} + 0$$

Soit $\vec{e}$ le vecteur unitaire et de même sens que $\vec{b}$.

Alors $\vec{b}$ $\quad \|\vec{b}\| \cdot \vec{e}$

et $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\|\vec{b}\| \cdot \vec{e}) = \vec{OA} \cdot (\|\vec{OB} \ \cdot \vec{e}) = \|\vec{OB}\| (\vec{OA} \cdot \vec{e} = \|\vec{OB}\| \cdot \overline{OC}$

On peut résumer ces résultats sous la forme suivante.

Si $\vec{0} \notin \{\vec{a}, \vec{b}\}$, $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $C = p_{\perp}(A) \in (OB)$, $D = p_{\perp}(B) \in (OA)$, alors le produit scalaire de deux vecteurs est égal au

1. produit scalaire de l'un et du "projeté othogonal" de l'autre

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OC} \cdot \vec{OB} = \vec{OD} \cdot \vec{OA}$$

2. produit de la norme de l'un et de la mesure algébrique du "projeté orthogonal" de l'autre

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OB}\| \cdot \overline{OC} = \|\vec{OA}\| \cdot \overline{OD}$$

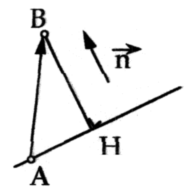
(Exercice pour les classes de Sciences)

Si H est le **projeté orthogonal** d'un point P sur une droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{d}$ alors $\quad \vec{AH} = \dfrac{\vec{AP} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}|^2} \cdot \vec{d}$.

Si P' est le **symétrique** d'un point P par rapport à une droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{d}$ alors $\quad \vec{PP'} = 2 \cdot \vec{PA} + 2 \cdot \dfrac{\vec{AP} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}|^2} \cdot \vec{d}$.

7 Distance point - droite

7.1 Distance point - droite



Par définition de la distance d'un point à une droite, $\delta(B,d) = \delta(B,H)$ et $H = p_{\perp}(B) \in d$.

Par théorème de la mesure algébrique du "projeté orthogonal", avec $\vec{n} \neq \vec{0}$ colinéaire à $\vec{BH}$ on a pour tout A de la droite d

$$\vec{AB} \cdot \left(\frac{1}{\|\vec{n}\|} \cdot \vec{n}\right) = HB$$

Alors
$$\boxed{\delta(B,d) = |HB| = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}}$$

Soit $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne d'une droite d et $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur normal à la droite.

Alors, pour tout A de la droite d

$$\delta(B,d) = |\ HB\ | = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

$$\Leftrightarrow \qquad \delta(B,d) = \frac{|(x_1 - x)\,a + (y_1 - y)\,b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \delta(B,d) = \frac{|a x_1 + b y_1 - a x - b y|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

avec $a x + b y + c = 0$ et $c = -a x - b y$

on a
$$\boxed{\delta(B\,,d) = \frac{|a x_1 + b y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Remarque

Si d n'est pas verticale, alors $b \neq 0$ et $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-ax-c}{b}$

Soit A et B de même abscisse x_1 et $A \in d$.

Alors, l'ordonnée de A est $\frac{-ax_1 - c}{b}$, et

$B(x_1; y_1)$ est "au-dessus" de la droite d

$$\Leftrightarrow \quad y_1 > \frac{-ax_1-c}{b}$$

$$b > 0 \text{ et } by_1 > -ax_1 - c \text{ et } ax_1 + by_1 + c > 0$$

ou

$$b < 0 \text{ et } by_1 < -ax_1 - c \text{ et } ax_1 + by_1 + c < 0$$

$\Leftrightarrow$ b et $ax_1 + by_1 + c$ de même signe.

7.2 Bissectrices

On sait que chaque bissectrice de deux droites est un axe de symétrie de ces droites et leur réunion est l'ensemble des points équidistants à ces droites.

Alors, si $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$
sont des équations cartésiennes de deux droites d_1 et d_2, la réunion des bissectrices de d_1 et d_2 est l'ensemble des points $P(x;y)$ tels que

$$\delta(P, d_1) = \delta(P, d_2)$$

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}$$

On obtient deux équations cartésiennes des deux bissectrices des droites d_1 et d_2

8 Angle orienté d'un couple de droites

8.1 Définitions

Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}_2$ d'orientation positive, on appelle **angle directeur** d'une droite d de vecteur directeur $\vec{d}$ l'angle orienté $\measuredangle(\vec{i}\,;\vec{d})$ de mesure $\dot{\alpha}$.

Remarques

1. Si $\vec{d}$ est un vecteur directeur de d, alors $-\vec{d}$ en est un autre et l'on a un autre angle directeur $\measuredangle(\vec{i}\,;-\vec{d})$. Les mesures des angles directeurs diffèrent de $\dot{\pi}$.
2. Si la droite n'est pas parallèle à la droite $d(O, \vec{j})$, sa pente est $m = \operatorname{tg} x$ si $\dot{x} = m_{rad}(\measuredangle(\vec{i}\,;\vec{d}))$.

Soit deux droites d_1 et d_2 de vecteurs directeurs respectifs $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$, $\dot{\alpha}_1 = m_{rad}(\measuredangle(\vec{i}\,;\vec{d_1})$ et $\dot{\alpha}_2 = m_{rad}(\measuredangle(\vec{i}\,;\vec{d_2})$. On appelle **angle orienté du couple de droites** $(d_1\,;\,d_2)$ l'angle orienté $\measuredangle(\vec{d_1};\vec{d_2})$ de mesure $\dot{\varphi} = \dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1$.

L'angle orienté correspond à la rotation "directe" autour de leur point d'intersection qui amène d_1 sur d_2.

8.2 Détermination d'un angle orienté

Si aucune des droites n'est parallèle à la droite $d(O, \vec{j})$ et si les droites ne sont pas orthogonales on a

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}}$$

8.3 Expression trigonométrique du produit scalaire

Soit deux vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et l'angle orienté $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ de mesure α. Le produit scalaire étant indépendant du repère orthonormé, on peut arbitrairement choisir $\vec{i}$, le premier vecteur de la base, colinéaire à $\vec{a}$ et de même sens que $\vec{a}$ avec $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Si $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ est le vecteur unitaire de même sens que $\vec{b}$ et, alors M appartient au cercle trigonométrique et

$$\vec{u} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j}$$

Avec $\vec{a} = \|\vec{a}\| \cdot \vec{i}$

$$\vec{b} = \|\vec{b}\| \cdot \vec{u} = \|\vec{b}\| \cdot (\cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j})$$

on a $\vec{a} \cdot \vec{b} = [\, \|\vec{a}\| \cdot \vec{i} \,] \cdot [\, \|\vec{b}\| \cdot (\cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j}) \,]$

et $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} \qquad \vec{a}\,\| \cdot \ \vec{b}\,\| \cdot \cos\alpha}$

Si l'on prend la valeur absolue, $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \qquad \vec{a} \quad \|\vec{b} \quad |\cos\alpha|$, avec $|\cos\alpha| \leq 1$

on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \vec{a} \qquad \vec{b}$$

9 Faisceau de droites

Soit $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

des équations cartésiennes de deux droites d_1 et d_2.

Si $d_1 \cap d_2 = \{P\}$, alors toute combinaison linéaire de ces deux équations avec $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$

$$k_1(a_1x + b_1y + c_1) + k_2(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

$$(k_1a_1 + k_2a_2)\,x + \quad k_1b_1 + k_2b_2)\,y + k_1c_1 + k_2c_2 = 0$$

est une équation cartésienne d'une droite dépendant des paramètres k_1 et k_2.

Si d_1 et d_2 se coupent en un point P, les coordonnées de P vérifient simultanément les équations de d_1 et d_2 et par conséquent celle de la combinaison linéaire. Une telle équation caractérise un **faisceau de droites** et toutes les droites du faisceau passent par le point fixe P.

Si $d_1 \parallel d_2$ et $k_1 \neq -k_2$, l'ensemble des droites du plan d'équation

$$(k_1a_1+k_2a_2)\,x + (k_1b_1+k_2b_2)\,y + k_1c_1 + k_2c_2 = 0$$

est une direction du plan car $\quad d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

et $\begin{vmatrix} k_1a_1+k_2a_2 & k_1b_1+k_2b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = k_1a_1b_1 + k_2a_2b_1 - k_1a_1b_1 - k_2a_1b_2$

$$k_2(a_2b_1 - a_1b_2) = -k_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Ainsi, le déterminant des coefficients de x et de y dans l'équation cartésienne de d_1 et de chaque droite du faisceau est égal à 0. Donc les droites sont toutes parallèles à d_1.

10 Le cercle

10.1 Equations du cercle

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle étant l'ensemble des points P équidistants d'un point fixe P_0, on a

$$P(x;y) \in \mathcal{C}_{(P_0,r)} \Leftrightarrow \delta(P_0, P) = r \Leftrightarrow \|\overrightarrow{P_0P}\|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2} \quad \text{et } r>0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0 \qquad \text{et } r > 0$$

Réciproquement, $P(x;y) \in \mathbb{P} \mid Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$ et $A \neq 0$ et $\frac{B^2+C^2}{4A^2} - \frac{D}{A} > 0\}$

est un cercle fixé par une équation cartésienne du deuxième degré en x et y dans laquelle

- le terme en xy est absent
- les coefficients de x^2 et y^2 sont égaux et non nuls.

En effet, $\quad Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0 \quad$ et $A \neq 0$ et $\frac{B^2+C^2}{4A^2} - \frac{D}{A} > 0$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}y + \frac{D}{A} = 0 \quad \text{et } A \neq 0 \text{ et } \frac{B^2+C^2}{4A^2} - \frac{D}{A} > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2} + y^2 + \frac{C}{A}y + \frac{C^2}{4A^2} = -\frac{D}{A} + \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C^2}{4A^2} \quad \text{et } A \neq 0 \text{ et } \frac{B^2+C^2}{4A^2} - \frac{D}{A} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 = r^2 \quad \text{et } r^2 = \frac{B^2+C^2}{4A^2} - \frac{D}{A}$$

Remarque

Avec $A \neq 0$, l'équation cartésienne du cercle devient $\quad x^2 + y^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}y + \frac{D}{A} = 0$

ou aussi $\quad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad$ et $\quad a^2 + b^2 - 4c > 0$

10.2 Construction du cercle

Voici trois méthodes pour obtenir une équation cartésienne d'un cercle passant pas trois points non alignés.

1. Les trois points appartenant au cercle, leurs coordonnées vérifient l'équation cartésienne. On obtient ainsi trois équations pour trois inconnues a, b et c de $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

2. Le point de concours des médiatrices de deux paires de points donne le centre $P_0(x_0; y_0)$, puis la distance du centre à l'un des points donne le rayon r.

3. L'égalité des distances de chacun des trois points au centre donne deux équations qui déterminent les coordonnées du centre $P_0(x_0; y_0)$, puis la distance du centre à l'un des points donne le rayon r.

11 Droites et cercles

11.1 Position relative

$$x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \qquad \text{une équation cartésienne d'un cercle}$$

et

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{une équation cartésienne d'une droite.}$$

Les solutions du système formé par ces deux équations, si elles existent, sont les coordonnées des points d'intersection du cercle et de la droite, puisqu'elles vérifient simultanément les équations des deux ensembles.

Pour résoudre un tel système, on peut isoler une inconnue (y par exemple si $b \neq 0$) dans l'équation de la droite et on la substitue dans l'équation du cercle. On obtient ainsi une équation du deuxième degré à une inconnue (en x) dont le nombre de solutions, donc de points d'intersection, dépend du discriminant de cette équation

	$\Leftrightarrow$	2 solutions distinctes	$\Leftrightarrow$	2 points d'intersection	$\Leftrightarrow$	droite sécante
$\Delta = 0$	$\Leftrightarrow$	1 solution double	$\Leftrightarrow$	1 point d'intersection	$\Leftrightarrow$	droite tangente
$\Delta < 0$	$\Leftrightarrow$	pas de solution	$\Leftrightarrow$	intersection vide	$\Leftrightarrow$	droite extérieure au cercle

On utilise cependant plus volontiers une méthode directe basée sur le critère géométrique de la distance du centre à la droite.

$$\delta(P_0, d) < r \quad \Leftrightarrow \quad \text{droite sécante}$$
$$\delta(P_0, d) = r \quad \Leftrightarrow \quad \text{droite tangente}$$
$$\delta(P_0, d) > r \quad \Leftrightarrow \quad \text{droite extérieure au cercle}$$

(Cette deuxième méthode ne fournit pas les coordonnées des points de l'intersection. Elle précise la position relative droite - cercle.)

11.2 Problème de la tangente par un point

Exemple

Déterminer les tangentes issues du point P (9; 4) au cercle de centre C (4; -1), de rayon $r = \sqrt{5}$.

La tangente de pente m inconnue a pour équation: $\quad y - 4 = m(x - 9)$

Pour utiliser la condition $\delta(P_0, d) = r$, on écrit l'équation sous la forme cartésienne

$$mx - y + (4 - 9m) = 0$$

Alors $\quad \delta(P_0, d) = \dfrac{|4m - (-1) + (4 - 9m)|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$

$$\frac{|5(-m + 1)|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{25(m^2 - 2m + 1)}{m^2 + 1} = 5$$

$$\Leftrightarrow \quad 5m^2 - 10m + 5 \qquad m^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2m^2 - 5m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m = 2 \quad \text{ou} \quad m = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad m \in \{\tfrac{1}{2}, 2\}$$

On a donc deux tangentes d'équations:

$$y - 4 = 2(x - 9) \quad \text{et} \quad y - 4 = \frac{1}{2}(x - 9)$$

$$y = 2x - 14 \quad \text{et} \quad y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

$$2x - y - 14 = 0 \quad \text{et} \quad x - 2y - 1 = 0$$

11.3 Tangente en un point du cercle

Le rayon aboutissant au point de tangence P_1 est orthogonal à la tangente. Alors, par le théorème de la projection orthogonale relatif au produit scalaire, on a, quel que soit P appartenant à la tangente,

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{P_0P_1} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = (\overrightarrow{P_0P_1})^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = \|\overrightarrow{P_0P_1}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = r^2$$

On en déduit alors la relation analytique suivante

$$\boxed{(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = r^2}$$

11.4 Tangentes de pente donnée

Soit un cercle d'équation $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

et une droite d'équation $y = mx+h$

La droite est tangente au cercle si et seulement si sa distance au centre égale le rayon.

Pour utiliser la formule de la distance,on écrit l'équation de la droite sous la forme:

$$mx - y + h = 0$$

Alors la droite est tangente si $\delta(P_0, d) = \dfrac{\left| m x_0 - y_0 + h \right|}{\sqrt{m^2+1}} = r$

$$\Leftrightarrow \quad \left| m x_0 - y_0 + h \right| = r\sqrt{m^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad m x_0 - y_0 + h = \pm r\sqrt{m^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad h = \pm r\sqrt{m^2+1} - m x_0 + y_0$$

L'équation des deux tangentes est donc

$$\boxed{y - y_0 = m(x-x_0) \pm r\sqrt{m^2+1}}$$

12 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Thème d'exercices pour les élèves de Sciences.

12.1 Puissance d'un point par rapport à une cercle

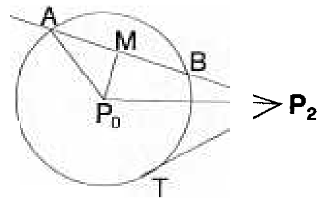
Théorème et définition

Soit un cercle de centre P_0 et de rayon r, et un point P_2.

Quelle que soit la sécante (AB) passant par le point P_2, le produit scalaire $\overrightarrow{P_2A} \cdot \overrightarrow{P_2B}$ est constant.

Ce nombre constant se nomme la <u>**puissance du point P_2**</u> par rapport au cercle.

Soit M le milieu de [A,B].



$$\overrightarrow{P_2A}\cdot\overrightarrow{P_2B} = (\overrightarrow{P_2M}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{P_2M}+\overrightarrow{MB})$$

$$= (\overrightarrow{P_2M}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{P_2M}-\overrightarrow{MA})$$

$$= \overrightarrow{P_2M}^2 - \overrightarrow{MA}^2$$

$$= \|\overrightarrow{P_2M}\|^2 - \|\overrightarrow{MA}\|^2$$

$$= \|\overrightarrow{P_0P_2}\|^2 - \|\overrightarrow{P_0M}\|^2 - \|\overrightarrow{MA}\|^2 \qquad \text{(Pythagore)}$$

$$= \|\overrightarrow{P_0P_2}\|^2 - (\|\overrightarrow{P_0M}\|^2 + \|\overrightarrow{MA}\|^2)$$

$$= \|\overrightarrow{P_0P_2}\|^2 - r^2 \qquad \text{(Pythagore)}$$

On a bien un produit constant $\boxed{p = \overrightarrow{P_2A}\cdot\overrightarrow{P_2B} = \|\overrightarrow{P_0P_2}\|^2 - r^2}$

$$\boxed{p = (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 - r^2}$$

On remarque que la puissance d'un point P_2 par rapport à un cercle d'équation donnée se calcule en remplaçant les coordonnées x et y par celles du point P_2 dans l'équation canonique du cercle écrite sous la forme f(x,y) = 0.

Propriété

Si le point P_2 est extérieur au cercle, la puissance de P_2 égale le carré de la distance du point P_2 au point T de tangence de l'une des tangentes au cercle issues de P_2.

12.2 Axe radical de deux cercles

Théorème et définition

L'ensemble des points du plan qui ont même puissance par rapport aux deux cercles non concentriques est une droite. Cette droite s'appelle **axe radical**.

Propriétés

1. L'axe radical est une droite orthogonale à la droite passant par les centres
2. Si les deux cercles sont sécants, l'axe radical est la droite contenant la corde commune.
3. Si les deux cercles sont tangents, l'axe radical est la tangente commune.
4. La partie de l'axe radical de deux cercles, extérieure aux cercles, est le lieu d'où l'on peut mener aux cercles des tangentes de même longueur.
5. Si deux cercles ont une tangente commune, l'axe radical passe par le milieu du segment déterminé par les points de tangence.

12.3 Centre radical de trois cercles

Lorsque les centres de trois cercles ne sont pas alignés, les axes radicaux de ces cercles pris deux à deux sont trois droites concourantes. Leur point d'intersection est appelé **centre radical** des trois cercles.

Déterminer l'axe radical de deux cercles non sécants à l'aide d'un troisième cercle coupant les deux premiers.

12.4 Cercles orthogonaux

Deux cercles sécants sont dits orthogonaux si leurs tangentes respectives aux points d'intersections sont orthogonales.

Déterminer la condition analytique d'orthogonalité de deux cercles et établir un rapport avec la puissance d'un point par rapport à un cercle.

13 Problèmes de lieux géométriques

Définition On appelle **lieu géométrique** un ensemble de points défini en compréhension, c'est-à-dire un ensemble dont les points satisfont à une ou plusieurs conditons.

13.1 Détermination d'un lieu géométrique à l'aide des vecteurs

Souvent la formulation vectorielle des conditions données permet d'obtenir une équation canonique, c'est-à-dire la relation liant les coordonnées des points de ce lieu.

Cette méthode convient bien à la résolution de problèmes liés à des questions relatives à la distances d'un point à des points fixes ou à des droites données. C'est de cette manière que l'on a obtenu les équations des bissectrices de deux droites, celle du cercle ou celle de l'axe radical de deux cercles.

13.2 Détermination d'un lieu géométrique par élimination de paramètres

Il n'est pas toujours possible de transcrire immédiatement à l'aide des vecteurs la condition caractérisant les points du lieu géométrique. C'est parfois le cas lorsque celui-ci est défini par un point mobile situé à l'intersection de deux figures dont les positions varient.

On s'efforce alors de décrire chaque figure à l'aide d'une équation paramétrique, le paramètre caractérisant les différentes positions des figures. On cherche aussi une équation liant les paramètres et correspondant à la condition caractérisant les points du lieu. La résolution du système d'équations par élimination des paramètres conduit à une équation canonique du lieu géométrique.

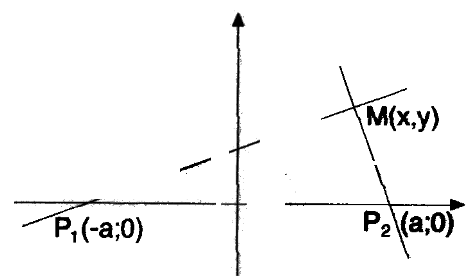
Souvent, il suffit d'éliminer un paramètre entre deux équations ou deux paramètres entre trois équations.

13.3 Exemple

Soit deux points distincts P_1 et P_2. Par P_1 on donne une droite et par P_2 l'orthogonale à celle-ci. Trouver le lieu des points d'intersection de ces deux droites lorsque la première tourne autour de P_1.

Remarque

La possibilité de changer le repère permet de l'amener à occuper une position particulière par rapport à la figure étudiée dans le but de simplifier les calculs algébriques. Il est alors souhaitable de choisir judicieusement la position des données dans le repère, à condition de ne pas restreindre la portée générale du problème par le choix d'un cas particulier.



Méthode vectorielle

On choisit P_1 et P_2 sur l'axe (Ox) avec O milieu de $[P_1, P_2]$.

Les droites (P_1M) et (P_2M) étant orthogonales, le lieu E cherché est l'ensemble des points tels que

$$M(x;y) \in E \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1M} \cdot \overrightarrow{P_2M} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+a)(x-a) + (y-0)(y-0) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

qui est l'équation canonique d'un cercle centré à l'origine et de rayon a.

Le lieu cherché est donc un cercle dont le centre est le milieu du segment $[P_1, P_2]$ et dont le rayon est $\frac{1}{2}\,\delta(P_1, P_2)$.

Remarque

Lorsqu'on a trouvé l'équation du lieu, on l'interprète géométriquement en se rapportant à l'énoncé du problème.

Méthode par élimination du paramètre

Comme les droites pivotent autour de P_1, respectivement P_2, on choisit d'exprimer les équations de ces droites en fonction de leurs pentes qui serviront de paramètres.

$M(x;y) \in E$

$$\begin{cases} M(x;y) \in d_1 \quad \text{la première droite} & \Leftrightarrow \quad y - 0 = m_1(x + a) \\ \text{et} & \\ M(x;y) \in d_2 \quad \text{la deuxième droite} & \Leftrightarrow \quad y - 0 = m_2(x - a) \\ \text{et} & \\ \text{condition d' othogonalité} \quad d_1 \perp d_2 & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m_1 m_2 = -1 \quad \text{et aucune droite verticale} \\ \text{ou} \quad M = P_1 \quad \text{et la première droite est verticale} \\ \text{ou} \quad M = P_2 \quad \text{et la deuxième droite est verticale} \end{cases} \end{cases}$$

La résolution de ce système de trois équations par élimination des paramètres donne $x^2 + y^2 = a^2$