§8. FONCTIONS HYPERBOLIQUES ET FONCTIONS HYPERBOLIQUES RECIPROQUES

8.1 FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Définition.

On appelle fonction sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique, tangente hyperbolique et cotangente hyperbolique, qu'on note respectivement sh , ch , th , cth les fonctions

$$\begin{aligned} \mathrm{sh} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{ch} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{th} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathrm{th}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{cth} : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathrm{cth}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \end{aligned}$$

Formules fondamentales

(elles présentent une certaine analogie avec celles de la trigonométrie) .

(a) $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$

(b) $\mathrm{th}\, x = \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$

(c) $\mathrm{cth}\, x = \dfrac{1}{\mathrm{th}\, x} = \dfrac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}$

(d) $1 - th^2 x = \dfrac{1}{ch^2 x}$

(e) $cth^2 x - 1 = \dfrac{1}{sh^2 x}$

Les démonstrations de ces propriétés font l'objet de l'exercice 25.

Formules d'addition

(on remarquera à nouveau l'analogie avec celles de la trigonométrie).

(a) $sh(x + y) = sh\,x\ ch\,y + ch\,x\ sh\,y$

$sh(x - y) = sh\,x\ ch\,y - ch\,x\ sh\,y$

(b) $ch(x + y) = ch\,x\ ch\,y + sh\,x\ sh\,y$

$ch(x - y) = ch\,x\ ch\,y - sh\,x\ sh\,y$

(c) $th(x + y) = \dfrac{th\,x + th\,y}{1 + th\,x\ th\,y}$

$th(x - y) = \dfrac{th\,x - th\,y}{1 - th\,x\ th\,y}$

On pourra démontrer ces propriétés à titre d'exercice (cf. exercice 26) .

Parité

$sh(-x) = -\,sh\,x \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$ch(-x) = ch\,x \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$th(-x) = -\,th\,x \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$cth(-x) = -\,cth\,x \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*$

Les fonctions sh , th , cth sont donc impaires et la fonction ch est paire.

Signes

x		0	
sh x	- - - - - - - - - - -	$\boxed{0}$	+ + + + + + + + + + + +
ch x	+ + + + + + + + + + + +	+	+ + + + + + + + + + + +
th x	- - - - - - - - - - -	$\boxed{0}$	+ + + + + + + + + + + +
cth x	- - - - - - - - - - -	‖	+ + + + + + + + + + + +

Asymptotes

Les fonctions sh et ch n'ont pas d'asymptotes.

La fonction th admet la droite $y = 1$ comme asymptote horizontale pour x tendant vers $+\infty$ et la droite $y = -1$ comme asymptote horizontale pour x tendant vers $-\infty$.

La fonction cth admet la droite $x = 0$ comme asymptote verticale et les droites $y = 1$ et $y = -1$ comme asymptotes horizontales lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$ respectivement.

Dérivées

On peut aussi les calculer sans peine :

$$(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x \quad ,$$

$$(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x \quad ,$$

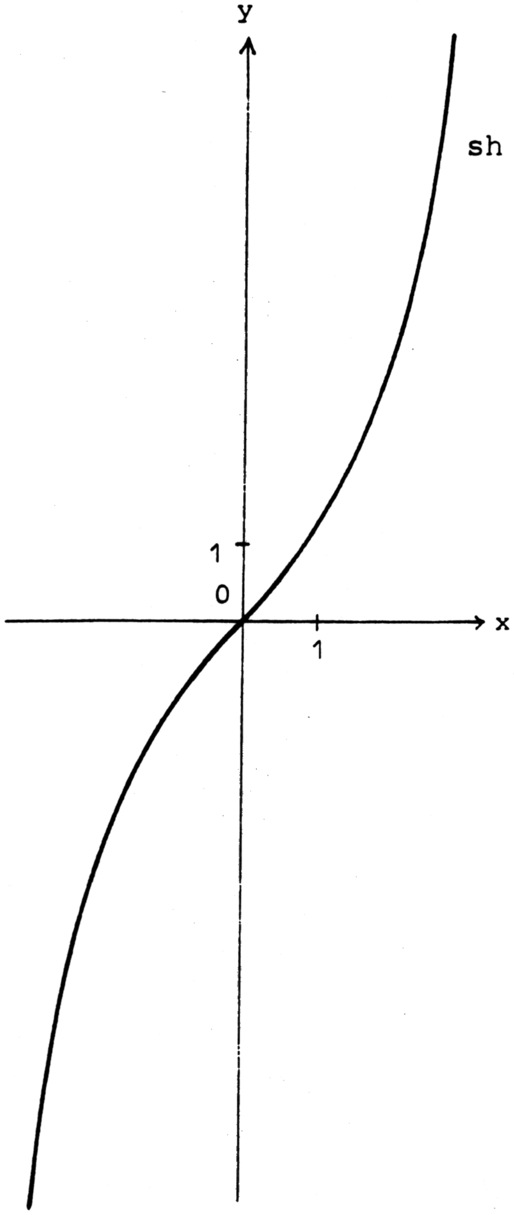
$$(\mathrm{th}\, x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x \quad ,$$

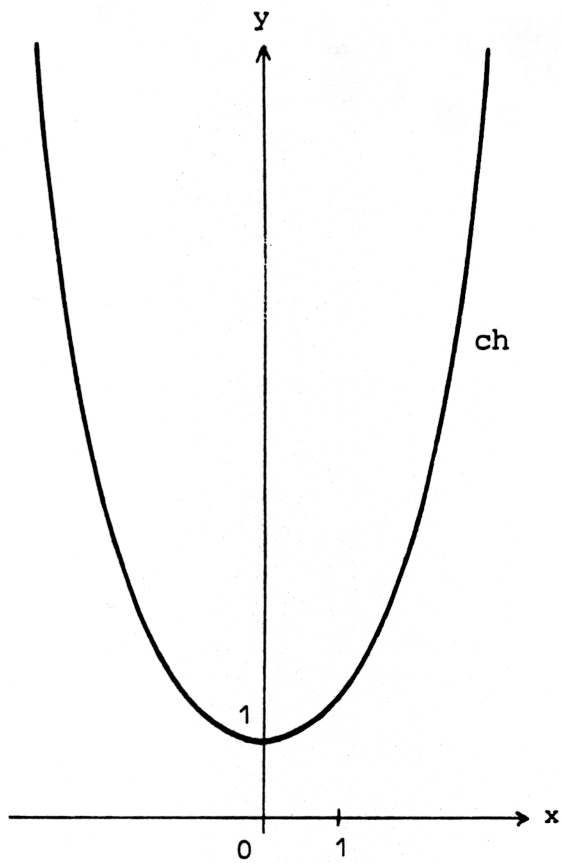
$$(\mathrm{cth}\, x)' = \frac{-1}{\mathrm{sh}^2 x} = 1 - \mathrm{cth}^2 x \quad .$$

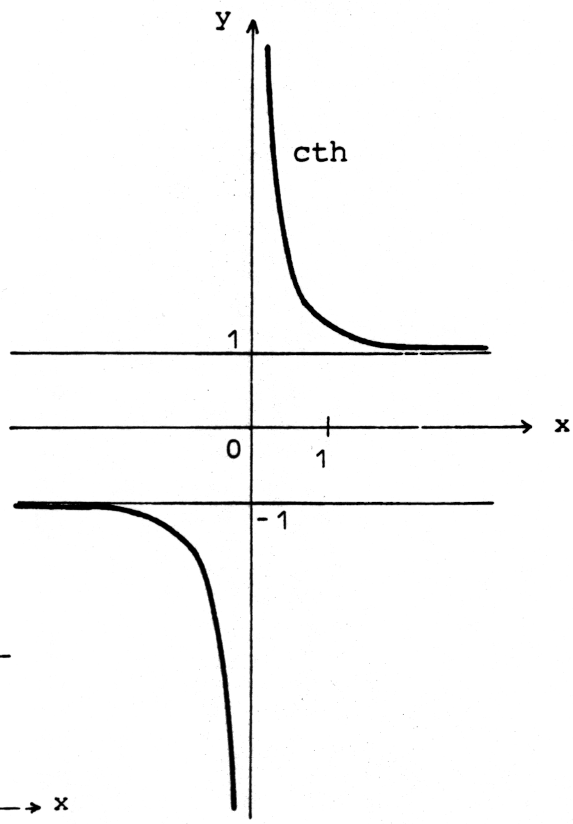
Tableaux de variations

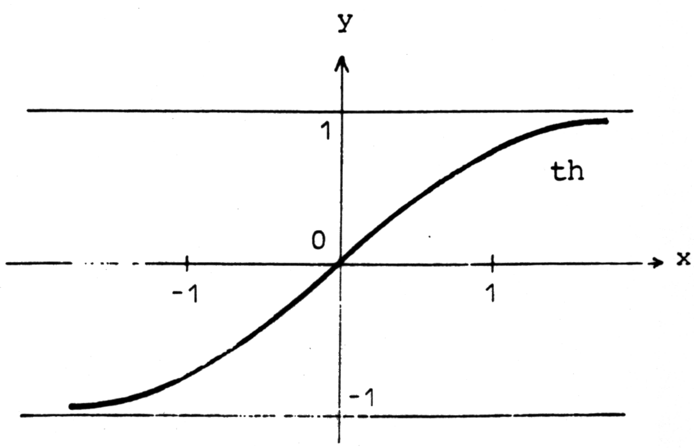
x		0	
sh x	↗		↗
ch x	↘	min 1	↗
th x	↗		↗
cth x	↘	‖	↘

Représentations graphiques









8.2 FONCTIONS HYPERBOLIQUES RECIPROQUES

En restreignant convenablement certains ensembles de départ et d'arrivée des fonctions hyperboliques, on peut définir des fonctions bijectives, que nous noterons encore sh , ch , th , cth :

$$\text{sh} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{sh}\, x \end{array} \qquad \text{ch} : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \text{ch}\, x \end{array}$$

$$\text{th} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & \text{th}\, x \end{array} \qquad \text{cth} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow &]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \text{cth}\, x \end{array}$$

Ces fonctions admettent alors des réciproques, qu'on appelle fonctions <u>argument sinus hyperbolique</u>, <u>argument cosinus hyperbolique</u>, <u>argument tangente hyperbolique</u>, <u>argument cotangente hyperbolique</u> et qu'on note respectivement

arg sh , arg ch , arg th , arg cth

<u>Théorème 6</u>.

Les fonctions arg sh , arg ch , arg th , arg cth sont dérivables partout où elles sont définies (sauf arg ch en $x = 1$) et l'on a :

$$\boxed{(\text{arg sh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

$$\boxed{(\text{arg ch}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$$

$$\boxed{(\text{arg th}\, x)' = \frac{1}{1-x^2}}$$

$$\boxed{(\text{arg cth}\, x)' = \frac{1}{1-x^2}}$$

Démonstration.

$$x \underset{\text{sh}}{\overset{\text{arg sh}}{\rightleftarrows}} y \qquad \text{avec} \qquad \begin{array}{l} y = \text{arg sh}\, x \\ x = \text{sh}\, y \end{array}$$

$$(\text{arg sh}\, x)' = \frac{1}{(\text{sh}\, y)'} = \frac{1}{\text{ch}\, y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

De manière analogue :

$$(\text{arg ch}\, x)' = \frac{1}{(\text{ch}\, y)'} = \frac{1}{\text{sh}\, y} = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(\text{arg th}\, x)' = \frac{1}{(\text{th}\, y)'} = \frac{1}{1 - \text{th}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$(\text{arg cth}\, x)' = \frac{1}{(\text{cth}\, y)'} = \frac{1}{1 - \text{cth}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

cqfd

Remarque

arg th et arg cth paraissent avoir la "même" dérivée. N'oublions pas toutefois que la première (et donc aussi sa dérivée) est définie sur $]-1,1[$, tandis que la seconde l'est sur $]\leftarrow,-1[\ \cup\ ]1,\rightarrow[$.

8.3 EXERCICES

1) Démontrer les formules fondamentales (a), (b), (c), (d), (e) sur les fonctions hyperboliques.

2) Démontrer les formules d'addition des fonctions hyperboliques.

3) Etablir les formules de dérivation des fonctions hyperboliques.

4) Calculer les dérivées des fonctions données par

a) $f(x) = \mathrm{sh}(3x)$

b) $f(x) = \mathrm{th}(1 + x^2)$

c) $f(x) = \mathrm{cth}\,\frac{1}{x}$

d) $f(x) = \ln \mathrm{th}(2x)$

e) $f(x) = \arg\mathrm{sh}\,(3x)$

f) $f(x) = \arg\mathrm{ch}\,(e^x)$

g) $f(x) = \mathrm{ch}^2(3x)$

h) $f(x) = \ln \mathrm{ch}\, x$

i) $f(x) = \arg\mathrm{th}\,(\sin x)$

5) Calculer

a) $\arg\mathrm{ch}\,\sqrt{2}$

b) $e^{-\arg\mathrm{cth}\,(\frac{25}{7})}$

c) $\cos\,(\,\pi\,\mathrm{sh}(\ln 2)\,)$

d) $\arg\mathrm{ch}\,(\mathrm{cth}(\ln 3))$

6) Démontrer l'identité

$$\mathrm{th}\,\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{\mathrm{sh}\, x}{1 + \mathrm{ch}\, x} .$$

7) Trouver les primitives des fonctions données par

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{9 - 4x^2}$

e) $f(x) = x\,\mathrm{sh}\, x$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}$

(poser $x = \mathrm{ch}\, t$)

8) Montrer que la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} t \\ y = \operatorname{sh} t \end{cases}$$

a pour équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1$ (c'est l'équation d'une hyperbole).

Note. On parle de fonctions circulaires pour les fonctions cos et sin, car le cercle de centre O(0,0) et de rayon 1 a pour équations paramétriques $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$. On qualifie les fonctions ch et sh d'hyperboliques pour des raisons analogues.

9) Calculer :

a) $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 4}\; dx$ (faire le changement de variable $x = 2 \operatorname{sh} t$)

b) $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}}$

10) Intégrer chacun des deux membres de l'égalité

$$\frac{2}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x}$$

pour en déduire les formules

$$|x| < 1 \implies 2 \operatorname{arg\,th} x = \ln \left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| = \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$|x| > 1 \implies 2 \operatorname{arg\,cth} x = \ln \left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| = \ln \frac{1 + x}{x - 1}$$

§8

REPONSES AUX EXERCICES

4) a) $3\ \mathrm{ch}(3x)$

b) $\dfrac{2x}{\mathrm{ch}^2(1+x^2)}$

c) $\dfrac{1}{x^2\ \mathrm{sh}^2(\frac{1}{x})}$

d) $\dfrac{2}{\mathrm{sh}(2x)\cdot \mathrm{ch}(2x)}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$

f) $\dfrac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

g) $3\ \mathrm{sh}(6x)$

h) $\mathrm{th}\, x$

i) $\dfrac{1}{\cos x}$

5) a) $\ln(1+\sqrt{2})$

b) $\frac{3}{4}$

c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\ln 2$

7) a) $\arg\mathrm{ch}\, x + c$

b) $\arg\mathrm{sh}\, x + c$

c) $\arg\mathrm{ch}\frac{x}{3} + c$

d) $\frac{1}{6}\arg\mathrm{th}\frac{2x}{3} + c$ si $x \in]-1,1[$

$\frac{1}{6}\arg\mathrm{cth}\frac{2x}{3} + c$ si $x \in]\leftarrow,-1[\cup]1,\rightarrow[$

e) $x\ \mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x + C$

f) $\arg\mathrm{ch}\, x - \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c$

9) a) $\frac{\sqrt{5}}{2} + 2\ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \cong 2{,}08$

b) $\frac{1}{2}\arg\mathrm{sh}\frac{3}{2} \cong 1{,}06$