EQUATIONS DIFFERENTIELLES - EXERCICES - Série 2

1) Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes :

		réponses :
a)	$x^2y' + y = 1$	$y = 1 + \alpha e^{\frac{1}{x}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
b)	$y' - x^3 = xy$	$y = -x^2 - 2 + \alpha e^{\frac{x^2}{2}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
c)	$y' \sin(x) - y \cos(x) = \cot(x)$	$y = \alpha \sin(x) - \dfrac{1}{2\sin(x)}$
d)	$(x+1)y' - 2y = (x+1)^3$	$y = (x+\alpha)(x+1)^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$
e)	$xy' - 2y = x^3e^x$	$y = x^2(e^x+\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

2) Equations avec conditions initiales :

			réponses :
a)	$xy' - 2y = 2 - x$	et $P(\frac{1}{2}\ ;\ 0) \in \Gamma$	$y = 2x^2 + x - 1$
b)	$2xy' + y = 1$ et	et $P(1\ ;\ 2) \in \Gamma$	$y = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
c)	$xy' + y = x \cos(x)$	et $P(\frac{\pi}{2}\ ;\ 1) \in \Gamma$	$y = \dfrac{x\sin(x) + \cos(x)}{x}$
d)	$y' = y + 3x + 2$	et $P(0\ ;\ -3) \in \Gamma$	$y = 2e^x - 3x - 5$
e)	$y' + y = e^{-x}$	et $P(0\ ;\ 0) \in \Gamma$	$y = xe^{-x}$
f)	$xy' + 3y = -\dfrac{2}{x}$	et $P(-1\ ;-3) \in \Gamma$	$y = \dfrac{4 - x^2}{x^3}$

3) Problèmes conduisant à une équation différentielle d'ordre 1 :

réponses :

a) Trouver les courbes planes Γ telles que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AP}$, avec $A \in (OJ) \cap \Gamma$ et $P \in \Gamma$, soit proportionnelle (avec a comme coefficient) à la valeur absolue de la pente de la tangente à Γ en P.

réponse : $y = a\ \mathrm{ch}(\frac{x}{a}) + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

b) Trouver les courbes planes Γ orthogonales aux cercles centrés en C(0 ;-1).

réponse : $y = \alpha x - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

c) Trouver les courbes planes Γ telles que la pente de la tangente à Γ en chaque point $P \in \Gamma$ est égale au produit des coordonnées de P.

réponse : $y = \alpha e^{\frac{1}{2}x^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

d) Trouver les courbe planes Γ telles que la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est égale à la dérivée de f .

$y = \dfrac{\alpha x}{x-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$