EQUATIONS DIFFERENTIELLES

§0 Historique

En 1638 naissent les premiers problèmes d'équations différentielles (Debeaune, Galilée).
Quelle est la forme d'une chaînette suspendue, la forme optimale d'un toboggan ou l'équation de la tractrice ?
F. Debeaune (1601 - 1652) fut le premier lecteur de la « Géométrie » de Descartes, parue en 1637.
En 1638, il propose des problèmes que Descartes et Fermat avaient vainement cherchés à résoudre.

✓ *Premier problème de Debeaune :*

Trouver une courbe Γ pour laquelle en chaque point P de Γ, le segment [T,N] avec $\{T\} = t \cap (OI)$ et t est la tangente à Γ en P et $N = p_{\perp}(P) \in (OI)$, est de longueur constant TN = a, $a \in \mathbb{R}_+^*$.

En posant y=f(x) l'équation d'une telle courbe Γ, et $P(x_0\,;y_0) \in \Gamma$, $N(x_0,0)$ et t : $y-y_0 = m(x-x_0)$ avec $m = f'(x_0)$;

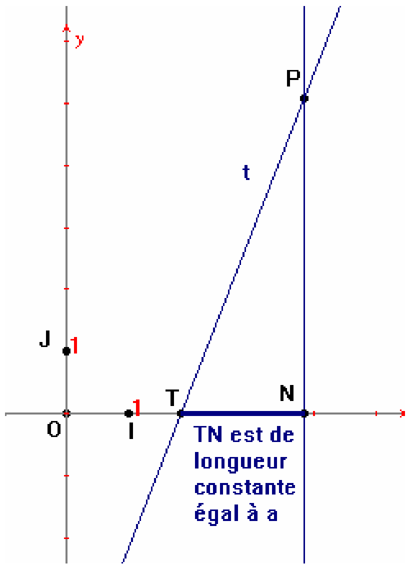
si y = 0, alors $x = x_0 - \dfrac{y_0}{m}$; d'où $T\left(x_0 - \dfrac{y_0}{m}, 0\right)$.

D'où $TN = \left\|\overline{TN}\right\| = \sqrt{\left(\dfrac{y_0}{m}\right)^2 + 0} = \left|\dfrac{y_0}{m}\right|$

et alors : $TN = a \Leftrightarrow \left|\dfrac{y_0}{m}\right| = a \Leftrightarrow \dfrac{y_0}{m} = \pm a$ qui devient en

remplaçant y_0 par y et m par y' : $\boxed{\dfrac{y}{y'} = \pm a}$ qui est

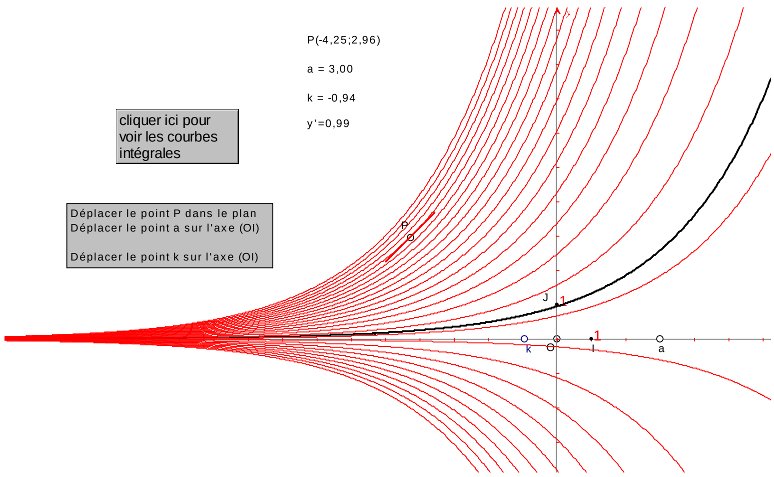
une équation différentielle.



ouvrir la figure cabri

On démontre que les courbes solutions Γ admettent une équation de la forme

$$y = k\,e^{\pm\frac{x}{a}},\ k \in \mathbb{R}.$$



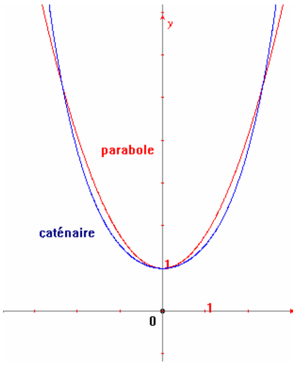
Voir aussi cette figure cabri

Voici le spectre de cette équation différentielle :

✓ *La caténaire – la brachystrochone :*

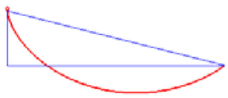
En 1638 toujours, paraissent les célèbres « Discorsi e Dimostrazioni Matematiche » de Galilée ; parmi les sujets traités, notons les deux observations suivantes :

a) *Une chaînette suspendue par deux clous sur un mur se place presque « ad unguem » au dessus d'une parabole.*
Ce résultat est imprécis. Agé de 17 ans, Christian Huygens fait en 1646 une démonstration théorique prouvant l'impossibilité de ce résultat.



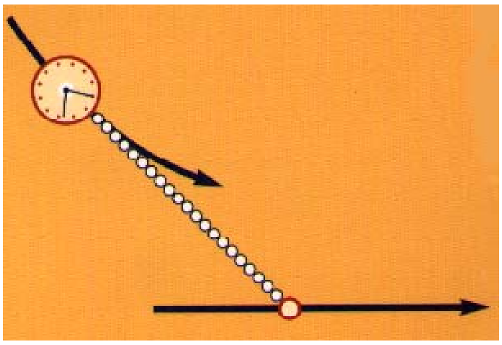
ouvrir la figure cabri

b) *Pour un corps glissant sous l'effet de la pesanteur, le mouvement le plus rapide entre deux points n'a pas lieu le long de la ligne la plus courte, c'est-à-dire le long d'une droite, mais le long d'un arc de cercle.*
Ce résultat est lui aussi incorrecte.
La solution correcte est un arc de cycloïde.
Cette observation de Galilée conduit en 1696 au célèbre problème de la **Brachystochrone**.



✓ *La tractrice :*

Lors de séjour de Leibniz à Paris (1672 - 1676), le célèbre mathématicien et architecte Claude Perrault lui propose le problème suivant : pour quelle courbe en chaque point P la tangente est de longueur constante a entre P et l'axe (OI) ?
Pour illustrer cette question, il tire de son gousset une « horologio portabili suae thecae argentae » et la fait glisser sur la table. Aucun autre mathématicien de sa connaissance n'avait été capable d'en trouver la formule.
Leibniz publie sa solution en 1693 en affirmant qu'il la connaît depuis longtemps.



En posant y=f(x) l'équation d'une telle courbe Γ,
$P(x_0\,;y_0)\in\Gamma$ et $t : y-y_0 = m(x-x_0)$ avec $m = f'(x_0)$;

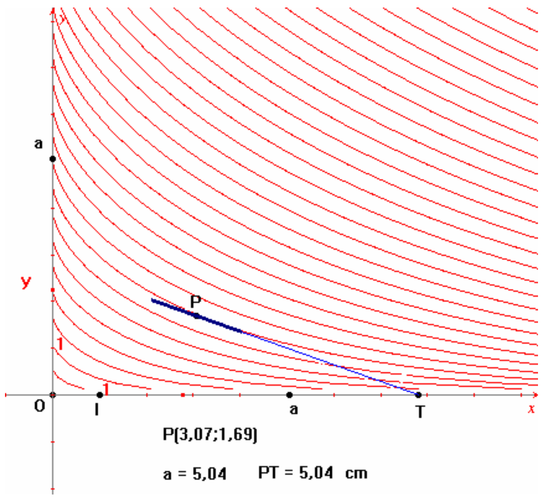
si $y = 0$, alors $x = x_0 - \dfrac{y_0}{m}$ et si $\{T\} = t \cap (OI)$,

on a $T(x_0 - \dfrac{y_0}{m}\,;0)$ et en remplaçant y_0 par y et m par y'

$$\text{on a } PT = \sqrt{\left(x_0 - (x_0 - \frac{y_0}{m})\right)^2 - y_0^2} = \sqrt{\frac{y_0^2}{y'^2} + y_0^2} = a$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = \pm \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

ouvrir la figure cabri



§1 *Généralités – Exemples - Isoclines*

On considère une fonction f et ses dérivées successives f', f'' , f''' , …, $f^{(n)}$ jusqu'à l'ordre n.

On utilisera les notations suivantes :

$$y=f(x),\ y'=f'(x),\ y''=f''(x),\ y'''=f'''(x),\ \ldots,\ y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

et y(a) l'image de a par la fonction f : y(a) = f(a).

Définition : *Une équation différentielle d'ordre n est une équation de la forme* $R(x\ ;\ y\ ;\ y'\ ;\ y''\ ;\ldots;\ y^{(n)}) = 0\ ^{(1)}$.

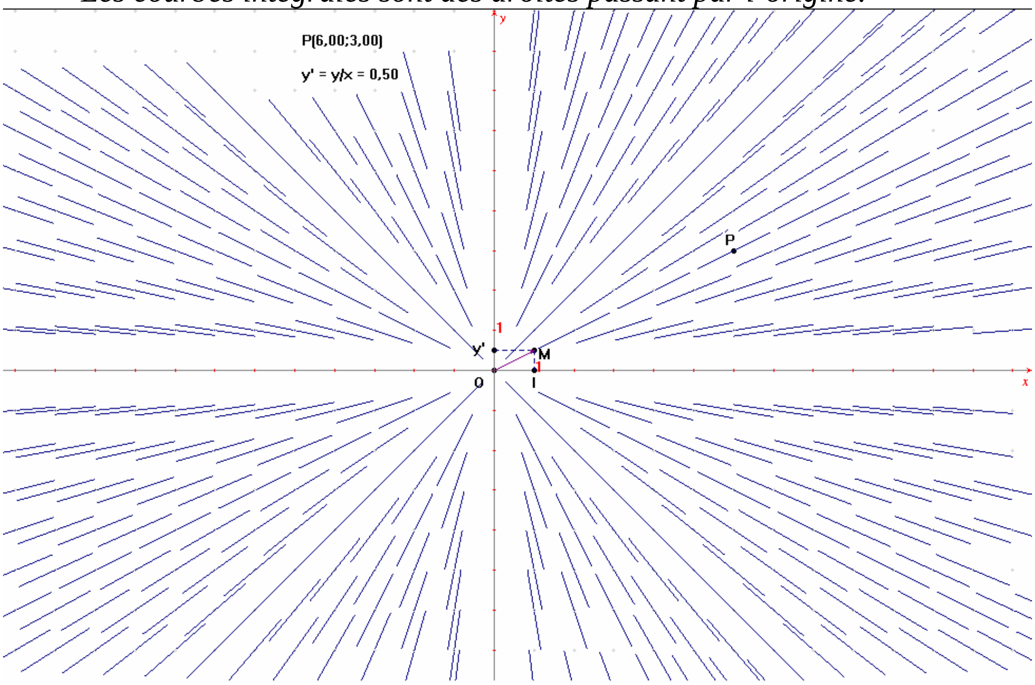
Toute fonction f qui vérifie, **pour tout $x \in E$ et $E \subset \mathbb{R}$**, l'équation $^{(1)}$, est une **solution** (particulière) ou **intégrale** (particulière) de cette équation.

Résoudre (ou **intégrer**) une équation différentielle $^{(1)}$ consiste à déterminer une fonction paramétrée par n constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_n$. On l'appelle l'***intégrale générale*** de l'équation $^{(1)}$.

Le graphique Γ_f d'une solution f d'une équation différentielle $^{(1)}$ s'appelle une **courbe intégrale**. L'ensemble des courbes intégrales de l'équation différentielle forme le **spectre** de l'équation $^{(1)}$.

Lorsqu'on connaît des conditions imposées à la fonction f, on peut déterminer les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ et on obtient alors une ***intégrale particulière*** de l'équation $^{(1)}$.

Exemple : *$xy'-y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 1 ;*
Son intégrale générale est $y = c_1 x,\ c_1 \in \mathbb{R}$.
En effet : $y' = c_1$ et alors $xy' - y = x\,c_1 - c_1 x = 0$.
Si la courbe intégrale passe par le point (2 ;1), alors $1 = c_1 2 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{2}$
d'où $y = \frac{1}{2}x$.
Les courbes intégrales sont des droites passant par l'origine.



ouvrir cette figure cabri

Les isoclines

- Soit l'équation différentielle du premier ordre y' = f(x,y) (∗)

  et y = φ(x,c) sa solution générale, c∈ℝ.
  Son graphique définit le spectre de cette équation différentielle.
  L'équation (∗) détermine, pour tout point M(x ;y) du plan, la valeur de la dérivée de y, c'est-à-dire la pente de la tangente à la courbe de φ au point M.
  L'équation (∗) détermine donc un ensemble de directions, ou champ de directions, dans le plan.

- Géométriquement, l'intégration d'une équation différentielle consiste à trouver les courbes dont la tangente en chaque point est confondue avec la direction du champ en ce point.

  On appelle ***isocline*** de l'équation différentielle (∗) le lieu géométrique des points vérifiant la relation y' = c (ensemble des points du plan où la tangente à la courbe intégrale qui y passe est constante). A chaque valeur de c correspond une isocline.
  L'équation de l'isocline sera donc f(x,y) = c.
  Une fois la famille des isoclines construites, on peut représenter approximativement la famille des courbes intégrales. Elles permettent de définir l'allure des courbes intégrales dans le plan.

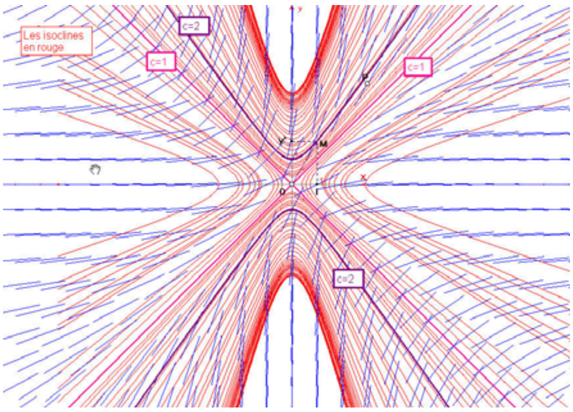
  - Un exemple d'isoclines :

    Soit l'équation différentielle : $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$

    Posons $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2} = c \Leftrightarrow 1+y^2 = c\,(1+x^2)$ et

    si c = 1 , alors $1+y^2 = 1+x^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow y = \pm x$: équations des bissectrices du repère

    si c = 2 , alors $1+y^2 = 2(1+x^2) \Leftrightarrow 1+y^2 = 2+2x^2 \Leftrightarrow y^2 = 2x^2 + 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2x^2+1}$

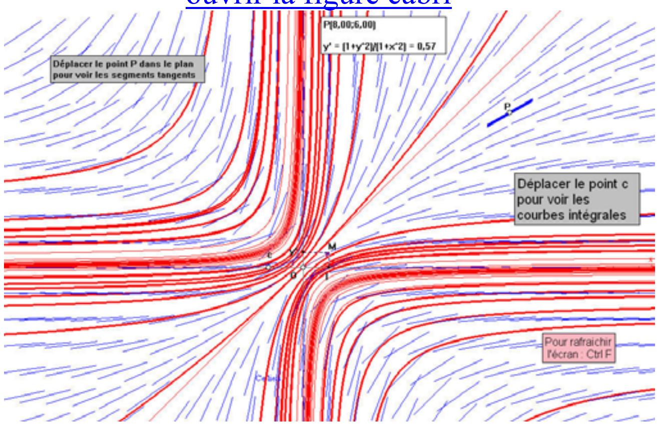


[ouvrir la figure cabri]

Pour c quelconque :

$1+y^2 = c\,(1+x^2) \Leftrightarrow 1+y^2 = c+cx^2$
$\Leftrightarrow y^2 = cx^2 + (c-1)$
$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{cx^2+(c-1)}$

remarque : en général, les isoclines ne sont pas les courbes intégrales.



[ouvrir la figure cabri]

La solution générale est donnée par
$y = \dfrac{x+c}{1-cx}$, c∈ℝ ,
dont les graphiques Γ sont des hyperboles équilatères
(dont les asymptotes sont orthogonales)
ou (si c = 0) la droite d'équation y = x

- Nous allons maintenant étudier quelques méthodes d'intégrations pour obtenir les solutions générales de quelques équations différentielles élémentaires.

- Les équations différentielles d'ordre 1 de la forme $y' = f(x)$ s'intègrent de manière élémentaire :

  Si F est une primitive de f, alors la solution générale de l'équation proposée est donnée par
  $$y = F(x) + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}\,.$$

  Exemple : $y' = \cos(2x)$ admet la solution générale $y = \frac{1}{2}\sin(2x) + c$, $c \in \mathbb{R}$;

  si de plus la courbe intégrale passe par le point $A\left(\frac{\pi}{4}\,;2\right)$, alors la solution particulière est $y = \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{3}{2}$.

§2 *Equations à variables séparées*

- Une équation différentielle du premier ordre pouvant s'écrire sous la forme

  $g(y)\,y' = f(x)$ (1), avec f , fonction de la variable x
  avec g, fonction de la variable y,

  s'appelle une ***équation différentielle à variables séparées***.

- Si l'on pose $y' = \frac{dy}{dx}$, on obtient $g(y)\,\frac{dy}{dx} = f(x) \Leftrightarrow g(y)\,dy = f(x)\,dx$
  équation dans laquelle les variables x et y sont séparées.
- Par intégration membre à membre, on obtient : $\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$,
  d'où $G(y) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$: intégrale générale de l'équadiff (1)
  avec G, une primitive de g, et F, une primitive de f.

- Exemple 1 : Intégrer l'équation différentielle suivante : $y'(1+x^2) - (1+y^2) = 0$;

  On a :
  $$y'(1+x^2) - (1+y^2) = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{1+y^2}{1+x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
  $$\Leftrightarrow \int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx \Leftrightarrow \arctan(y) = \arctan(x) + c\,,\ c \in \mathbb{R}$$
  $$\Leftrightarrow \arctan(y) = \arctan(x) + \arctan(\alpha)\,,\ \alpha \in \mathbb{R}$$
  $$\Leftrightarrow \quad y = \tan(\arctan(x) + \arctan(\alpha))\,,\ \alpha \in \mathbb{R}$$
  $$\Leftrightarrow \quad y = \frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(\alpha))}{1 - \tan(\arctan(x))\cdot\tan(\arctan(\alpha))} = \frac{x + \alpha}{1 - \alpha x}\,,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

  Les courbes intégrales de (1) sont donc des hyperboles (équilatères), d'asymptotes verticales $x = \frac{1}{\alpha}$ et d'as. horizontales $y = -\frac{1}{\alpha}$, si $\alpha \neq 0$, et si $\alpha = 0$, la droite $y = x$.

➢ Exemple 2 : *Lors de la désintégration d'un corps radioactif, la vitesse de désintégration à l'instant t est proportionnelle à la masse de ce corps à l'instant t :* ***v = k m*** *;*
Exprimer cette masse m en fonction du temps t sachant que m(0) = m_o.
Calculer le temps nécessaire à la désintégration de la moitié de la masse radioactive m_o.

Soit m la masse du radium à l'instant t et m+Δm sa masse à l'instant t+Δt.
La vitesse moyenne de désintégration pendant le temps Δt est alors :

$$v_m = \frac{-\Delta m}{\Delta t} \quad \text{(signe (–) car } \Delta m < 0)$$

La vitesse de désintégration à l'instant t est donc la limite : $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{-\Delta m}{\Delta t} = \frac{-dm}{dt}$

L'égalité ***v = k m*** s'écrit alors :

$$\frac{-dm}{dt} = k\,m \iff \frac{dm}{m} = -k\,dt$$: équation différentielle à variables séparées ;

Intégrons membre à membre :

$\ln|m| = -kt + c \iff |m| = e^{-kt+c} \iff |m| = e^c\, e^{-kt} \iff m = \pm e^c\, e^{-kt} \iff m = \alpha\, e^{-kt}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$;

Si t=0, alors $m=m_0$, et $m_0 = \alpha\, e^{-k0} = \alpha$, d'où l'expression donnant la masse du radium en fonction du temps : $m = m_0\, e^{-kt}$;

Si $m=\frac{1}{2}m_0$, alors $\frac{1}{2}m_0 = m_0\, e^{-kt} \iff e^{-kt} = \frac{1}{2} \iff t = \frac{\ln 2}{k}$, or $k = 4{,}4\cdot 10^{-4}$ (années-lumière)
d'où t ≅ 1575 ans .

§3 *Equations homogènes du premier ordre*

➢ Une équation différentielle du premier ordre pouvant s'écrire sous la forme

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \ ^{(2)} ,$$

s'appelle une ***équation différentielle homogène*** *(du premier ordre).*

➢ Remarque : Une fonction ψ : (x,y) ` ψ(x,y) est dite *homogène de degré n* par rapport aux variables x et y si l'on a $\psi = (kx,ky) = k^n\, \psi(x,y)$, $\forall k \in \mathbb{R}^*$.
Par exemple, la fonction ψ définie par $\psi(x,y) = x^4 + 2xy^3 + y^4$ est homogène de degré 4 car $\psi(kx,ky) = k^4\, \psi(x,y)\ \forall k \in \mathbb{R}^*$.
La fonction f dans l'équation différentielle (2) est donc une fonction homogène de degré 0, d'où le nom donné à ce genre d'équations différentielles.

➢ **Résolution** :

La méthode d'intégration d'une équation différentielle de type (2) consiste à la transformer en une équation différentielle de type (1) à variables séparées en posant $u = \frac{y}{x} \left(= \frac{f(x)}{x}\right)$ où la fonction φ : x ` $u = \varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$ est une nouvelle fonction inconnue.
On a alors : y = u x et y' = u'·x + u·1 que l'on substitue dans (2) ,

ce qui donne $u'x + u = f(u)$

$$\iff \frac{du}{dx}x = f(u) - u \iff \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x} \text{ , si } f(u) \neq u$$

(si f(u) = u, alors l'équation différentielle (2) s'écrit $y' = \frac{y}{x}$*, qui est une équation à variables séparées !)*

$$\Leftrightarrow \quad \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$$, que l'on intègre membre à membre :

$$\int \frac{1}{f(u)-u}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx + c \text{ , } c \in \mathbb{R} \text{ ;}$$

- Remarque : on peut démontrer que le spectre d'une telle équation homogène peut être obtenue par une homothétie de centre O(0 ;0) de l'une des courbes intégrales.

- Exemple : Déterminer la famille de courbes Γ si la longueur du segment de tangence limité le point de tangence P et l'intersection T de la tangente avec (OI) est égale à la longueur du segment [O,T].

Soit $P(x_0 ;y_0)$ le point de tangence de Γ et la tangente t d'équation $y-y_0 = m(x-x_0)$

avec $m = f'(x_0)$; d'où $T(x_0 - \frac{y_0}{m} ;0)$; la propriété se traduit : $PT^2 = OT^2$,

soit $$[(x_0 - \frac{y_0}{m}) - x_0]^2 + (0 - y_0)^2 = (x_0 - \frac{y_0}{m})^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_0 - \frac{y_0}{m})^2 + x_0^2 - 2x_0(x_0 - \frac{y_0}{m}) + y_0^2 = (x_0 - \frac{y_0}{m})^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0^2 + y_0^2 - 2x_0(x_0 - \frac{y_0}{m}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_0^2 + y_0^2)m - 2x_0^2 m + 2x_0y_0 = 0 \text{ , avec } m = f'(x_0) = y_0'$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_0^2 + y_0^2)y_0' - 2x_0^2 y_0' + 2x_0y_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y_0' = \frac{2x_0\,y_0}{x_0^2 - y_0^2}$$ qui est la relation que le point $P(x_0 ;y_0)$

doit vérifier si et seulement si il appartient Γ .

L'équation différentielle à résoudre est donc : $$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

qui peut encore s'écrire $y' = \dfrac{2\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}}$, équation différentielle homogène d'ordre 1 ;

en posant $u = \frac{y}{x}$ et $y' = u'x + u$ on obtient :

$$u'x + u = \frac{2u}{1-u^2} \Leftrightarrow u'x = \frac{2u}{1-u^2} - u \Leftrightarrow u'x = \frac{u+u^3}{1-u^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u+u^3}{(1-u^2)x} \Leftrightarrow \frac{1-u^2}{u+u^3}\,du = \frac{1}{x}\,dx$$: équation à variables séparées.

Intégrons cette équation différentielle :

$$\int \frac{1-u^2}{u+u^3}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx + c \Leftrightarrow \int \frac{1+u^2-2u^2}{u(1+u^2)}\,du = \ln|x| - \ln\alpha \text{ (et } \alpha \in \mathbb{R}_+^*)$$

$$\Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2}\right)du = \ln\left|\frac{x}{\alpha}\right| \Leftrightarrow \ln|u| - \ln(1+u^2) = \ln\left|\frac{x}{\alpha}\right| \Leftrightarrow$$

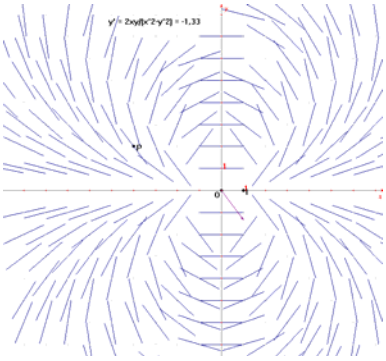
$$\Leftrightarrow \ln \frac{|u|}{1+u^2} = \ln\left|\frac{x}{\alpha}\right| \Leftrightarrow \frac{|u|}{1+u^2} = \left|\frac{x}{\alpha}\right| \Leftrightarrow \frac{u}{1+u^2} = \pm\frac{x}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{u}{1+u^2} = \frac{1}{k}x \ (k \in \mathbb{R}^*)$$

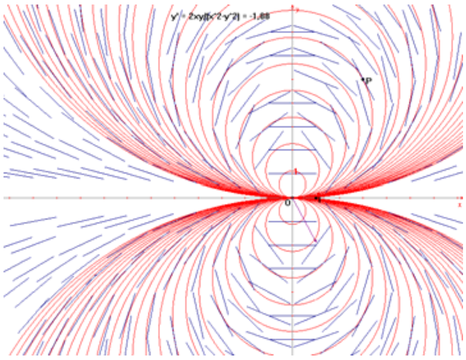
En posant $u = \dfrac{y}{x}$, on obtient $\dfrac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \dfrac{1}{k}x \Leftrightarrow 1+\dfrac{y^2}{x^2} = k\dfrac{y}{x} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = ky$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - ky = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - \frac{k}{2})^2 = \frac{k^2}{4}$$

C'est l'équation d'une famille de cercles centrés sur l'axe (OJ) et tangents à (OI).

Résolution avec Cabri :





- **Envisageons les problèmes suivants :**

1) *Déterminer l'équation différentielle dont les courbes intégrales sont les cercles centrés sur (OJ) et contenant l'origine O.*

Un cercle centré sur (OJ) et contenant l'origine admet l'équation

$$x^2 + (y - \frac{k}{2})^2 = \frac{k^2}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - ky = 0 \ ^{(*)}.$$

Si l'on dérive membre à membre en fonction de x (rappel : y = f(x) et y' = f'(x))

on obtient : $2x + 2yy' - ky' = 0 \Leftrightarrow y' = \dfrac{2x}{k-2y} \ ^{(**)}$;

or , de l'équation (*) on tire : $k = \dfrac{x^2+y^2}{y}$;

d'où l'équation (**) devient : $y' = \dfrac{2x}{\frac{x^2+y^2}{y} - 2y} \Leftrightarrow y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$.

2) *Quelles sont les courbes planes orthogonales aux cercles centrés sur (OJ) et contenant l'origine ?*

Définition : Deux courbes Γ_1 et Γ_2 sont dites orthogonales si les tangentes à Γ_1 et Γ_2 en un point P d'intersection de Γ_1 et Γ_2 sont orthogonales.

Ainsi, si y' est la pente de la tangente à Γ_1 en P(x ;y), alors $\frac{-1}{y'}$ est la pente de la tangente à Γ_2 en P(x ;y).

L'équation différentielle des cercles centrés sur (OJ) et contenant l'origine est :

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

donc l'équation différentielle des courbes orthogonales à ces cercles sera :

$$\frac{-1}{y'} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \Leftrightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \quad \text{(équation homogène)}$$

en posant $u = \frac{y}{x}$ et $y' = u'x + u$ on obtient :

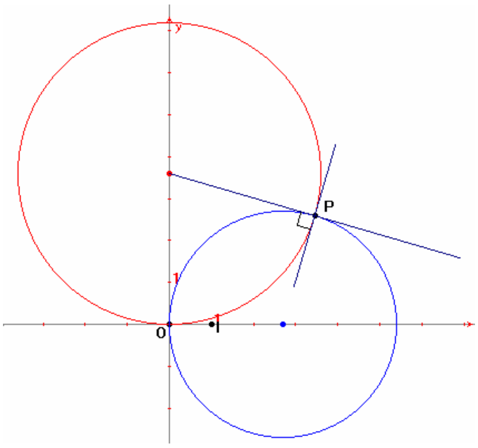
$$u'x + u = \frac{u^2 - 1}{2u} \quad \Leftrightarrow \quad u'x = \frac{u^2 - 1}{2u} - u \Leftrightarrow u'x = \frac{-u^2 - 1}{2u} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2u}{u^2 + 1} du = \frac{-1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \int \frac{2u}{u^2 + 1} du = \int \frac{-1}{x} dx + c \ , \ \ c \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(u^2+1) = -\ln|x| + \ln(\alpha) \ , \ \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

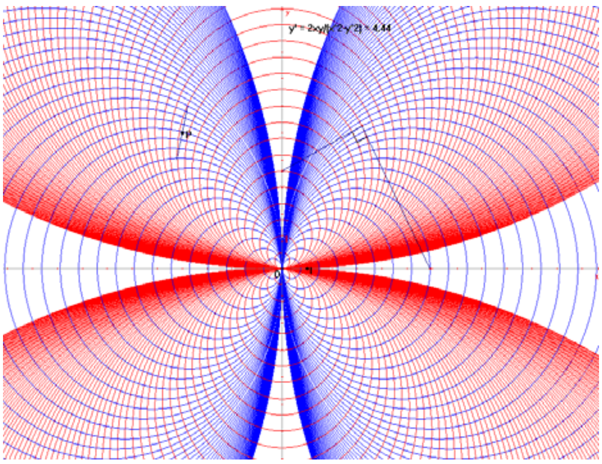
$$\Leftrightarrow \ln(u^2+1) = \ln\left|\frac{\alpha}{x}\right| \ , \ \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \Leftrightarrow \quad u^2 + 1 = \pm \frac{\alpha}{x} \ , \ \alpha \in \mathbb{R}^* \quad \Leftrightarrow \quad u^2 + 1 = \frac{k}{x} \ , \ k \in \mathbb{R}^*$$

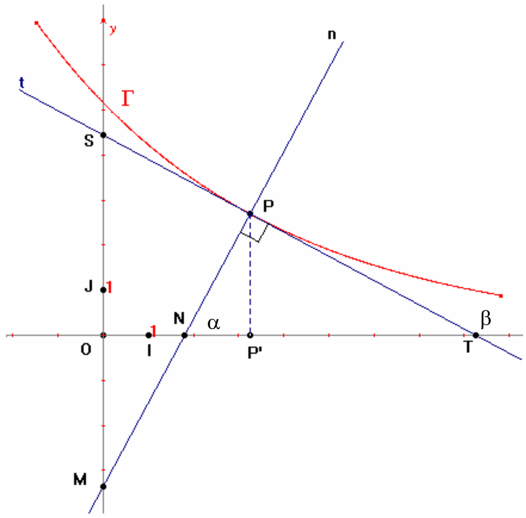
$$\Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{k}{x} \ , \ k \in \mathbb{R}^* \quad \Leftrightarrow \quad y^2 + x^2 = kx \ , \ k \in \mathbb{R}^* \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - kx = 0 \ , \ k \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{k^2}{4} \ , \ k \in \mathbb{R}^* \ \text{: équation des cercles centrés sur (OI) et passant par O.}$$



ouvrir la figure cabri





- Soit une courbe plane Γ et un point P(x ;y) de Γ, soit t la tangente à Γ en P et n la normale à Γ en P, avec $n \perp t$.

  Posons $t \cap (OI) = \{T\}$, $t \cap (OJ) = \{S\}$, $n \cap (OI) = \{N\}$ et $n \cap (OJ) = \{M\}$.

  Si l'on note y' la pente de la tangente à Γ en P, alors la pente de la normale à Γ en P sera donnée par $\dfrac{-1}{y'}$.

- ***Problème 1***

  Déterminer les courbes planes telles que la distance PN est constante et égale à r, $r \in \mathbb{R}_+^*$.

  Soit P'= $p_\perp(P) \in (OI)$; dans le triangle rectangle PNP', on a, par Pythagore,

  $$PN^2 = NP'^2 + PP'^2 \text{ , où } PN = r \text{ , } PP' = |y| \text{ (où } y = \overline{P'P} \text{)}$$

  Or la pente de la normale est égale à $\dfrac{-1}{y'}$ et à la tangente de α, mesure de l'angle $\measuredangle\left(\overrightarrow{OI}, \vec{n}\right)$,

  et $\tan(\alpha) = \dfrac{\overline{P'P}}{\overline{NP'}} = \dfrac{y}{\overline{NP'}} \Leftrightarrow y = \tan(\alpha)\cdot \overline{NP'} = \dfrac{-1}{y'}\overline{NP'} \Leftrightarrow \overline{NP'} = y'\cdot y$;

  Ainsi $\quad r^2 = (y'\cdot y)^2 + y^2 = y^2(y'^2 + 1) \Leftrightarrow y'^2 + 1 = \dfrac{r^2}{y^2} \Leftrightarrow y'^2 = \dfrac{r^2 - y^2}{y^2}$

  $$\Leftrightarrow \quad y' = \frac{\pm\sqrt{r^2 - y^2}}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}}\,dy = (\pm 1)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}}\,dy = \int (\pm 1)\,dx$$

  $$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{r^2 - y^2} = \pm x + c \text{ , } c \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - y^2 = (x - c)^2 \text{ , } c \in \mathbb{R}$$

  $\Leftrightarrow \quad (x - c)^2 + y^2 = r^2$, $c \in \mathbb{R}$: les courbes intégrales sont donc des cercles centrés sur l'axe (OI) et de rayon r , solutions « évidentes » !

- ***Problème 2***

  Déterminer les courbes planes telles que la distance PT est constante et égale à r, $r \in \mathbb{R}_+^*$; ces courbes s'appellent des ***tractrices***.

  Soit P'= $p_\perp(P) \in (OI)$; dans le triangle rectangle PP'T, on a, par Pythagore,

  $$PT^2 = P'T^2 + PP'^2 \text{ , où } PT = r \text{ , } PP' = y$$

  Or la pente de la tangente est égale à y' et à la tangente de β, mesure de l'angle $\measuredangle\left(\overrightarrow{OI}, \vec{t}\right)$,

  et $\tan(\beta) = \dfrac{\overline{P'P}}{\overline{P'T}} = \dfrac{y}{\overline{P'T}} \Leftrightarrow y = \tan(\beta)\cdot \overline{P'T} = y'\,\overline{P'T} \Leftrightarrow \overline{P'T} = \dfrac{y}{y'}$;

Ainsi $r^2 = (\frac{y}{y'})^2 + y^2 \Leftrightarrow r^2 - y^2 = \frac{y^2}{y'^2} \Leftrightarrow y'^2 = \frac{y^2}{r^2 - y^2} \Leftrightarrow y' = \frac{\pm y}{\sqrt{r^2 - y^2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{y}\, dy = (\pm 1)\, dx \Leftrightarrow \int \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{y}\, dy = \int (\pm 1)\, dx .$$

Or, si nous posons y = r sin(t), dy = r cos(t) , d'où

$$\int \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{y}\, dy = \int \frac{\sqrt{r^2(1 - \sin^2(t))}}{r \sin(t)}\, r\cos(t)\, dt = \pm r \int \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)}\, dt = \pm r \int \left[\frac{1}{\sin(t)} - \sin(t) \right] dt$$

$$= \pm r \left[\ln \left| \tan\left(\frac{t}{2}\right) \right| + \cos(t) \right]$$

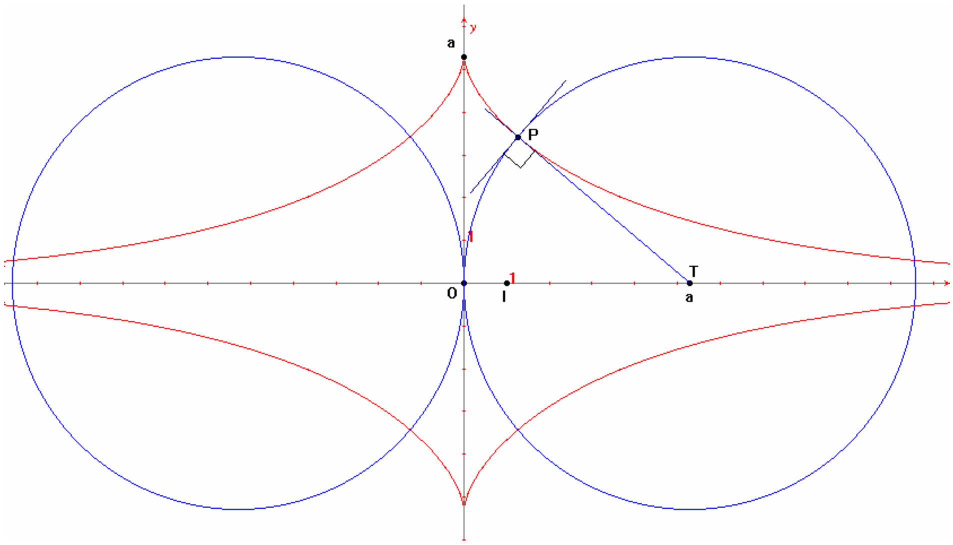
Finalement $\int \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{y}\, dy = \int (\pm 1)\, dx \Leftrightarrow \pm r \left[\ln \left| \tan\left(\frac{t}{2}\right) \right| + \cos(t) \right] = \pm x + c$, $c \in \mathbb{R}$;

Les courbes intégrales admettent donc les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = \pm r \left[\ln \left| \tan\left(\frac{t}{2}\right) \right| + \cos(t) \right] \\ y = r\sin(t) \end{cases}$$

Remarque : à partir de l'équation différentielle du problème 1) : $y' = \frac{\pm\sqrt{r^2 - y^2}}{y}$,

si l'on remplace y' par $\frac{-1}{y'}$, on obtient l'équation différentielle du problème 2) : $y' = \frac{\pm y}{\sqrt{r^2 - y^2}}$



[ouvrir la figure cabri]

§5 *Equations linéaires du premier ordre*

- Une équation différentielle est dite ***linéaire du premier ordre*** par rapport à la fonction inconnue et à sa dérivée si elle est de la forme :

$$y' + f(x)\cdot y = g(x)\ ^{(1)}, \text{ où f et g sont des fonctions continues.}$$

Pour intégrer $^{(1)}$, on considère d'abord l'équation $y' + f(x)\cdot y = 0\ ^{(2)}$, équation $^{(1)}$ sans second membre qui est une équation à variables séparées ;

On peut écrire cette équation $^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
& y' + f(x)\cdot y = 0 \iff y' = -f(x)\cdot y \\
\iff\ & y = 0 \text{ ou } \frac{1}{y}\,dy = -f(x)\,dx \\
\iff\ & y = 0 \text{ ou } \int \frac{1}{y}\,dy = \int -f(x)\,dx + c \text{ , et } c \in \mathbb{R} \\
\iff\ & y = 0 \text{ ou } \ln|y| = -F(x) + \ln|k| \text{ , } k \in \mathbb{R}^* \\
\iff\ & y = 0 \text{ ou } \left|\frac{y}{k}\right| = e^{-F(x)} \text{ , } k \in \mathbb{R}^* \\
\iff\ & y = 0 \text{ ou } |y| = |k|\ e^{-F(x)} \text{ , } k \in \mathbb{R}^* \\
\iff\ & y = \alpha\, e^{-F(x)} \text{ , } \alpha \in \mathbb{R} \text{ ,}
\end{aligned}$$

L'intégrale générale de $^{(2)}$ est donc $y = \alpha\, e^{-F(x)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour poursuivre l'intégration de l'équation $^{(1)}$, on utilise le théorème suivant :

- **Théorème**

L'intégrale générale de l'équation linéaire du premier ordre $^{(1)}$ est la somme d'une intégrale particulière de $^{(1)}$ et de l'intégrale générale de l'équation sans second membre $^{(2)}$.

Démonstration :

1) Soit z l'intégrale générale de $^{(2)}$

et z_1 une intégrale particulière de $^{(1)}$,

alors $(z+z_1)' = z' + z_1' = -f(x)\cdot z + (-f(x))\cdot z_1 + g(x)$

d'où $(z+z_1)' + f(x)\cdot(z+z_1) = g(x)$

et par là $(z+z_1)$ est bien une intégrale générale de $^{(1)}$.

2) Montrons qu'il n'y en a pas d'autres :

Soit u l'intégrale générale de $^{(1)}$

et v une intégrale particulière de $^{(1)}$,

considérons $u = \overbrace{v}^{} + \underbrace{(u - v)}_{}$ — $(u-v)$: ***int.gén.de*** $^{(2)}$ *(à prouver)* ; v : ***int.part. de*** $^{(1)}$

preuve :

$u' + f(x)\cdot u = g(x)$ (car u est l'intégrale générale de $^{(1)}$)

et $-$ $v' + f(x)\cdot v = g(x)$ (car v est l'intégrale particulière de $^{(1)}$)

$(u-v)' + f(x)\cdot(u-v) = 0$ donc $(u-v) = z$ est intégrale générale de $^{(2)}$

et ainsi $z = u - v \Leftrightarrow u = z + v$ donc u est bien la somme de l'intégrale générale z de $^{(2)}$ et d'une intégrale particulière v de $^{(1)}$.

CQFD

- Soit donc l'équation différentielle $y' + f(x)\cdot y = g(x)$ $^{(1)}$,

on a vu que $y = \alpha\, e^{-F(x)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, avec F(x) une primitive de f(x) est l'intégrale générale de l'équation sans second membre $^{(2)}$; pour intégrer l'équation différentielle $^{(1)}$, il nous suffit donc de trouver une intégrale particulière de $^{(1)}$:

- Pour cela
  - ∗ soit on " flaire " une intégrale particulière de $y' + f(x) = g(x)$ $^{(1)}$
  - ∗ soit on applique une astuce proposée par Lagrange Joseph-Louis (1736 – 1813) appelé « *méthode de variation des constantes* ».

- **Méthode de variation des constantes** : *(pour trouver une intégrale particulière de* $^{(1)}$*)*

On cherche une intégrale particulière de $^{(1)}$ de la forme :

$$z_1 = u \cdot e^{-F(x)} \text{ , où } u = \alpha(x) \text{ est à déterminer ;}$$

d'où $$z'_1 = u'\, e^{-F(x)} + u\, e^{-F(x)}\, (-F(x))' = u'\, e^{-F(x)} + u\, e^{-F(x)}\, (-f(x))$$

et si z_1 est une intégrale particulière de $y' + f(x)\cdot y = g(x)$ $^{(1)}$, alors

$$z'_1 + f(x)\, z_1 = g(x) \text{ et } z_1 = u \cdot e^{-F(x)} \Leftrightarrow$$
$$u'\, e^{-F(x)} + u\, e^{-F(x)}\, (-f(x)) + f(x)\, u \cdot e^{-F(x)} = g(x) \Leftrightarrow$$
$$u'\, e^{-F(x)} = g(x) \Leftrightarrow$$
$$u' = g(x)\, e^{F(x)}$$

et $u = \alpha(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)}\, dx$, formule à calculer pour obtenir $\alpha(x)$, et une intégrale particulière de $^{(1)}$.

D'où l'intégrale générale de (1) sera :

$$y = \alpha(x)\, e^{-F(x)} + \alpha e^{-F(x)} = [\alpha(x)+\alpha]\, e^{-F(x)},$$

avec $\alpha(x)$ une primitive de $g(x)\, e^{F(x)}$ et $F(x)$ une primitive de $f(x)$.

➢ ***Exemple*** **:**

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' + y\cos(x) = \sin(x)\cos(x)$ $^{(1)}$;

1) on résout l'équation sans second membre (équation à variables séparées) :

$$y' + y\cos(x) = 0 \;^{(2)} \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int -\cos(x)\,dx + c\ ,\ c \in \mathbb{R} \ \text{ ou } y = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = -\sin(x) + \ln(k)\ ,\ k \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{ou } y = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{y}{k}\right| = -\sin(x)\ ,\ k \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{ou } y = 0$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{y}{k}\right| = e^{-\sin(x)}\ ,\ k \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{ou } y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = k\, e^{-\sin(x)}\ ,\ k \in \mathbb{R} \quad \text{, intégrale générale de } ^{(2)}.$$

2) solution particulière de $^{(1)}$:

$$\alpha(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)}\,dx = \int \sin(x)\cos(x) \cdot e^{\sin(x)}\,dx \ \text{ (qui s'intègre par parties)}$$

posons $u = \sin(x)$, $du = \cos(x)\,dx$; $dv = \cos(x)\, e^{\sin(x)}\,dx$, $v = e^{\sin(x)}$

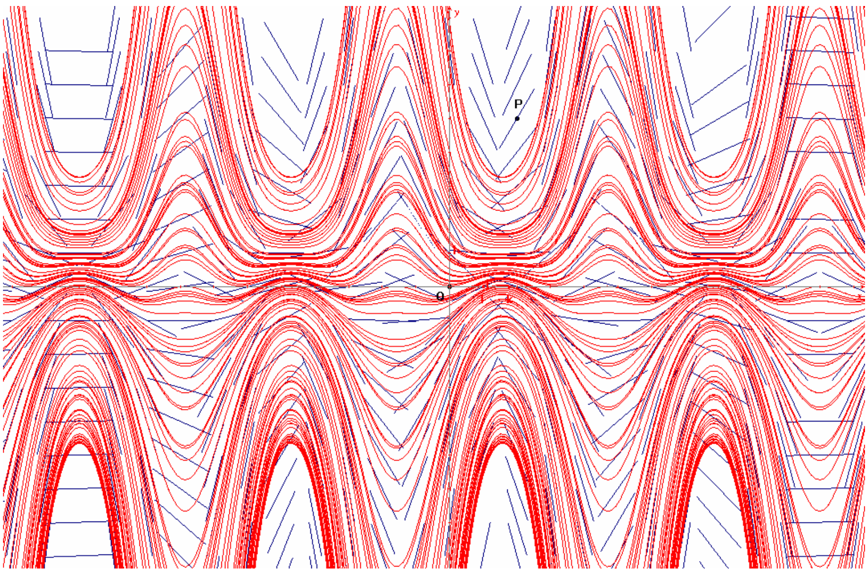
d'où

$$\alpha(x) = \sin(x)\, e^{\sin(x)} - \int \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}\,dx = \sin(x)\, e^{\sin(x)} - e^{\sin(x)}$$

$$= e^{\sin(x)}\,(\sin(x) - 1)$$

Ainsi l'intégrale générale de $^{(1)}$ est :

$$y = e^{\sin(x)}(\sin(x) - 1)e^{-\sin(x)} + k\, e^{-\sin(x)}\ ,\ k \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad y = (\sin(x) - 1) + k\, e^{-\sin(x)}\ ,\ k \in \mathbb{R}\ .$$



§6 *Equation de Bernoulli*

(équations présentées en 1695 et solutionnées en 1696)

- Une équation différentielle de la forme : $y' + f(x)\,y = g(x)\,y^n$, avec $n \in \mathbb{Q}-\{0,1\}$ est appelée *équation de Bernoulli* (Jacques).

remarque : si n = 0, alors l'équation différentielle est linéaire ;
si n = 1, alors l'équation différentielle est à variables séparables.

Soit l'équation différentielle $y' + f(x)\,y = g(x)\,y^n$, avec $n \in \mathbb{N}-\{0,1\}$ et $y \neq 0$

$$\Leftrightarrow \quad y'y^{-n} + f(x)\,y^{1-n} = g(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad z = y^{1-n} \text{ et } z' = (1-n)y^{-n}y' \text{ et } y'y^{-n} = \frac{1}{1-n}z'$$

$$\text{et } \frac{1}{1-n}z' + f(x)\,z = g(x)$$

qui est une équation différentielle linéaire en z, fonction inconnue de x.

- *Exemple* : Soit à résoudre l'équation différentielle

$$xy' + y - y^2\ln(x) = 0 \ (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2 \ \textit{(n=2)} \Leftrightarrow y'y^{-2} + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{\ln x}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad z=y^{-1} \text{ et } z' = -y^{-2}y' \text{ et } -z' + \frac{1}{x}z = \frac{\ln x}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad z=y^{-1} \text{ et } z' = -y^{-2}y' \text{ et } z' + \frac{-1}{x}z = \frac{-\ln x}{x} \ (2)$$

∗ soit l'équation sans second membre associée à (2) :

$$z' + \frac{-1}{x}z = 0 \Leftrightarrow \frac{z'}{z} = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{z}dz = \int \frac{1}{x}dx + c$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|z| = \ln|x| + \ln|\alpha| \quad \Leftrightarrow \quad z = \alpha x \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}$$

∗ recherche d'une équation particulière de (2) :

soit $z_1 = \alpha(x)\,e^{-F(x)}$ et $F(x) = \int f(x)\,dx = \int \frac{-1}{x}dx = -\ln x$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = \alpha(x)\cdot x \qquad \text{et } \alpha(x) = \int g(x)\,e^{F(x)}\,dx = \int \frac{-\ln x}{x}e^{-\ln x}\,dx = \int \frac{-\ln x}{x^2}dx$$

par parties : $u = \ln x$ $\quad dv = \frac{-1}{x^2}dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\quad v = \frac{1}{x}$

d'où $\alpha(x) = \int \frac{-\ln x}{x^2}dx = \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = \ln x + 1$$

∗ on obtient la solution générale de (2) : $z = \alpha x + \ln x + 1$ et $z = y^{-1}$

d'où la solution générale de (1) : $y = \dfrac{1}{\alpha x + \ln x + 1}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Exercices :

1) Résoudre les équations différentielles suivantes : *réponses*

a) $y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$ $\qquad y = \left(\frac{1}{2}x^2\ln|x| + \alpha x^2\right)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

b) $y' + y - xy^3 = 0$ $\qquad y^2 = \dfrac{1}{\alpha e^{2x} + (x + \frac{1}{2})}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

c) $3xy' = y\,(1 + x\sin(x) - 3y^3\sin(x))$ $\qquad y^3 = \dfrac{|x|}{\alpha e^{\cos(x)} + 3}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

2) Soit les courbes planes Γ telles que le segment [PN], avec P point de Γ et N point d'intersection de la tangente t à Γ en P avec l'axe (OJ), soit vu d'un point fixe A(a ;0), $a \neq 0$, sous un angle droit.

a) Etablir que l'équation différentielle dont ces courbes sont solutions est
$$a^2 - ax + y(y - y'x) = 0 \ ;$$

b) Déterminer l'équation de la courbe solution de cette équation différentielle passant par le point B(a ;2a).

(Matu scientifique 1992)