Limite et continuité d'une fonction

§1 Limites finies

- Soit une fonction f et D_f son domaine de définition.

Définition 1 : On dit que le nombre réel x_0 est un point **adhérent** de D_f si $\forall\eta>0, \exists x\in D_f$ et $x\neq x_0$ tel que $|x - x_0|<\eta$ ($\Leftrightarrow x_0 - \eta < x < x_0 + \eta$).
Le nombre x_0 est dit **isolé** s'il n'est pas **adhérent** de D_f .

- remarques : - tout nombre $x_0 \in]a,b[$ est adhérent de $]a,b[$. Les nombres a et b sont aussi adhérents de $]a,b[$.
  - si $x_0 \notin D_f$, alors x_0 peut être adhérent ou non : 3 est adhérent de $[1,3[\cup]3,7[$ (7 aussi) ; mais 3 n'est pas adhérent de $]-\infty,2]$;
  - si $D_f =]-\infty,2] \cup\{4\}$, alors 4 est un point isolé du D_f (non adhérent de D_f).

- **Définition 2** : Soit une fonction f , un nombre x_0 adhérent de D_f et un nombre réel ℓ .
On dit que la fonction f admet la limite ℓ pour x tendant vers x_0 ssi
$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ tel que $|x - x_0|<\delta \Rightarrow |f(x) - \ell|<\varepsilon$.
On note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

- **exemple :** Fonction constante : $f(x) = c$ $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} c = c}$

  En effet, $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ tel que $0 < |x - x_0|<\delta \Rightarrow |c - c| < \varepsilon$.

- remarques : - en général δ dépend de ε et de x_0 (le plus petit on prend ε, le plus petit il faut prendre δ).
  - la valeur $x = x_0$ est exclue de l'ensemble des nombres x pour lesquels on a l'inégalité $|f(x) - l|<\varepsilon$.

- **Théorème 1** : La limite ℓ est unique.

- démonstration :

§2 Limites infinies et à l'infini

- Soit une fonction f et D_f son domaine de définition.

Définitions 3 : Soit une fonction f , un nombre x_0 adhérent de D_f . On dit que :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ssi $\forall A>0, \exists\delta>0$ tel que $|x - x_0|<\delta \Rightarrow f(x) > A$;

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ ssi $\forall A>0, \exists\delta>0$ tel que $|x - x_0|<\delta \Rightarrow f(x) < -A$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell$ ssi $\forall\varepsilon>0, \exists B>0$ tel que $x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \ell$ ssi $\forall\varepsilon>0, \exists B>0$ tel que $x < -B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ ssi $\forall A>0, \exists B>0$ tel que $x > B \Rightarrow f(x) > A$.

(idem pour $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$).

- exemples :

§3 Limites à droite, limites à gauche

- Soit une fonction f et D_f son domaine de définition.

Définitions 4 : Soit une fonction f , un nombre x_0 adhérent de D_f et un nombre réel ℓ .
On dit que la fonction f admet la limite **à droite ℓ** pour x tendant vers x_0 si
$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ tel que $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow | f(x) - \ell |<\varepsilon$. On note $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} f(x) = \ell$.

Soit une fonction f , un nombre x_0 adhérent de D_f et un nombre réel ℓ .
On dit que la fonction f admet la limite **à gauche ℓ** pour x tendant vers x_0 si
$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ tel que $x_0 -\delta < x < x_0 \Rightarrow | f(x) - \ell |<\varepsilon$. On note $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} f(x) = \ell$.

- exemples :

§4 Propositions sur les limites finies

- **Définitions 5** : Soit f et g deux fonctions et leurs domaines de définition respectifs D_f et D_g .

L'application $f+g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x)$ se nomme **fonction somme** de f et g .

L'application $\lambda f : D_f \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda\cdot f(x)$ se nomme **fonction produit** de f par λ .

L'application $f \cdot g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (f\cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ se nomme **fonction produit** de f et g .

L'application $f^n : D_f \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (f^n)(x) = [f(x)]^n$ se nomme **fonction puissance** de f .

L'application $\frac{f}{g} : D_f \cap D_g \cap\{x\in\mathbb{R}|g(x)\neq 0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ se nomme **fonction quotient** de f et g .

L'application $g \circ f : \{x\in\mathbb{R} \mid x\in D_f \text{ et } f(x)\in D_g \} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (g\circ f)(x) = g[f(x)]$ se nomme **fonction composée** de f et g .

- **Théorème 2** : Si f et g admettent chacune une limite en x_0, alors $\lim\limits_{x\to x_0} (f + g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

- remarques : - On démontre par récurrence que pour la somme, cette propriété s'étend à un nombre quelconque de fonctions
  - si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - \ell] = 0$, car $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - \ell] = \lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + (-\ell)] =$
  $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} (-\ell) = \ell + (-\ell) = 0$.

- **Théorème 3** : Si f admet une limite en x_0, alors $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

- **Lemme 1** : Lorsque x tend vers x_0, si l'un des facteurs d'une fonction produit a pour limite 0 et que l'autre reste en valeur absolue strictement inférieur à un nombre réel, ce produit tend vers 0 .

- **Théorème 4** : Si f et g admettent chacune une limite en x_0, alors $\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

- remarque : On démontre par récurrence que cette propriété s'étend à un nombre quelconque de fonctions.

  En particulier : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to x_0} f^n(x) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n$

- **Théorème 5** : Si f admettant une limite en x_0 est telle que $\sqrt[n]{f}$ est définie pour $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$,

  alors $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f}(x) = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$.

- **Lemme 2** : Lorsque x tend vers x_0, si le numérateur d'une fonction quotient a pour limite 0 et que le dénominateur reste en valeur absolue supérieur à un nombre réel positif non nul, ce quotient tend vers 0 .

- **Théorème 6** : Si f et g admettent chacune une limite en x_0, la limite de g étant différente de 0,

  alors $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

- remarque : Tous ces théorèmes s'appliquent aussi pour les limites à droite et à gauche.

§5 Calcul des limites des fonctions élémentaires

- **Fonction identité** : $f(x) = x$ $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0}$

  En effet, $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ tel que $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon$ en prenant $\delta=\varepsilon$.

- **Fonction monôme**: $f(x) = ax^n$ $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} ax^n = ax_0^n}$

  En effet, $\lim\limits_{x\to x_0} ax^n = a\lim\limits_{x\to x_0}\left(x^n\right) = a\cdot\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)^n = ax_0^n$

- **Fonction polynôme** : $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x^1 + a_n$

  alors $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + a_2x_0^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x_0 + a_n}$

  En effet, il suffit d'appliquer le théorème 2 et la limite d'un monôme.

- **Fonction irrationnelle** : cf. le théorème 5 .

- **Fonction fractionnaire**: cf. le théorème 6 .

- remarque : Tous ces résultats s'appliquent aussi pour les limites à droite et à gauche.

§6 Propositions sur les limites infinies

- **Théorème 7** : Si f et g admettent chacune une limite finie, la limite de g étant différente de 0, lorsque | x | tend vers +∞ , alors

$$\lim_{|x|\to+\infty}(f+g)(x)=\lim_{|x|\to+\infty}f(x)+\lim_{|x|\to+\infty}g(x)$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}(\lambda f)(x)=\lambda\cdot\lim_{|x|\to+\infty}f(x)$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}(f\cdot g)(x)=\lim_{|x|\to+\infty}f(x)\cdot\lim_{|x|\to+\infty}g(x)$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{f}{g}(x)=\frac{\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)}{\lim\limits_{|x|\to+\infty}g(x)}\qquad \text{et } \lim_{|x|\to+\infty}g(x)\neq 0\,.$$

- remarque : On peut voir, dans la démonstration du théorème 7, que les raisonnements sont analogues pour les limites en x_0 ou les limites pour ±∞ .
Aussi, dans les théorèmes suivants, on omet parfois de le préciser.

- **Théorème 8** : Si dans une fonction somme l'une des fonctions a pour limite +∞ (resp. -∞) et l'autre est bornée inférieurement (resp. bornée supérieurement), alors la fonction somme a pour limite +∞ (resp. -∞) .

- **Théorème 9** : Si dans une fonction produit l'une des fonctions admet une limite infinie et l'autre est bornée inférieurement en valeur absolue par un nombre réel positif non nul, alors la fonction produit admet une limite infinie.

- **Théorème 10** : Si dans une fonction quotient le dénominateur admet une limite infinie et le numérateur est borné supérieurement en valeur absolue par un nombre réel positif, alors la fonction quotient a pour limite 0 .

§7 Formes indéterminées (ou indéterminations)

On peut résumer les théorèmes précédents par les "opérations algébriques" suivantes sur les limites :

Si $\lim f(x)=a$	et	$\lim g(x)=b$	alors	$\lim(f+g)(x)=a+b$	
Si $\lim f(x)=a$	et	$\lim g(x)=b$	alors	$\lim(fg)(x)=ab$	
Si $\lim f(x)=a$	et	$\lim g(x)=b$ (b≠0)	alors	$\lim\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{a}{b}$	
Si $\lim f(x)=a$ (a≠0)	et	$\lim g(x)=0$	alors	$\lim\left\lvert\frac{f}{g}\right\rvert(x)=+\infty$	
Si $\mathbf{\lim f(x)=0}$	**et**	$\mathbf{\lim g(x)=0}$	**alors**	$\mathbf{\lim\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\left(\frac{0}{0}\right)}$	**(?)** ***(non définie)***

Si $\lim f(x) = +\infty$	et	$\lim g(x) = b$	alors	$\lim(f+g)(x) = +\infty$
Si $\lim f(x) = -\infty$	et	$\lim g(x) = b$	alors	$\lim(f+g)(x) = -\infty$
Si $\lim f(x) = +\infty$	et	$\lim g(x) = +\infty$	alors	$\lim(f+g)(x) = +\infty$
Si $\lim f(x) = -\infty$	et	$\lim g(x) = -\infty$	alors	$\lim(f+g)(x) = -\infty$
Si $\lim f(x) = +\infty$	**et**	**$\lim g(x) = -\infty$**	**alors**	**$\lim(f+g)(x) = (+\infty - \infty)$ (?) *(non définie)***

Si $\lim f(x) = a$ $(a \neq 0)$	et	$\lvert \lim g(x) \rvert = +\infty$	alors	$\lvert \lim (fg)(x) \rvert = +\infty$
Si $\lvert \lim f(x) \rvert = +\infty$	et	$\lvert \lim g(x) \rvert = +\infty$	alors	$\lvert \lim (fg)(x) \rvert = +\infty$
Si $\lvert \lim f(x) \rvert = 0$	**et**	**$\lvert \lim g(x) \rvert = +\infty$**	**alors**	**$\lvert \lim (fg)(x) \rvert = 0 \cdot (+\infty)$ (?) *(non définie)***

Si $\lim f(x) = a$	et	$\lvert \lim g(x) \rvert = +\infty$	alors	$\lim \left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0$
Si $\lvert \lim f(x) \rvert = +\infty$	et	$\lim g(x) = b$	alors	$\lim \left\lvert\frac{f}{g}\right\rvert(x) = +\infty$
Si $\lvert \lim f(x) \rvert = +\infty$	et	$\lvert \lim g(x) \rvert = +\infty$	alors	$\lim \left\lvert\frac{f}{g}\right\rvert(x) = \frac{+\infty}{+\infty}$ **(?) *(non définie)***

Dans la recherche des limites d'une fonction, il arrive donc des situations où aucun des théorèmes précédemment établis ne s'appliquent. On les appelle des **indéterminations** ; il y en a quatre : $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

§8 Compléments sur l'étude des limites

Les théorèmes présentés dans cette partie du cours complètent les précédents. Des considérations d'encadrements, de majoration, de minoration, permettent de ramener certaines études compliquées de limites aux cas plus simples étudiés précédemment.

❑ **Théorème 11** : Soit f , g et h trois fonctions , définies ou non en x_0 , et définies sur un intervalle ouvert contenant x_0 ,

si $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

si $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

si $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existent, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

- Exemple :

- **Théorème 12** : *(Théorème des deux gendarmes)*
  Soit f , g et h trois fonctions , définies ou non en x_0 , et définies sur un intervalle ouvert I contenant x_0 ,
  si $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in I$, et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$

L'existence de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{t \to \ell} g(t)$ ne suffit pas en général à déterminer $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x))$.

Toutefois, on a les théorèmes :

- **Théorème 13** : 1) Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et si de plus $\lim\limits_{x \to \ell} g(x) = g(\ell)$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)] = g(\ell)$

  2) Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et si de plus $f(x) \neq \ell$ sur un intervalle ouvert contenant x_0,

  sauf éventuellement en x_0, alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{t \to \ell} g(t)$

- Exemples :

§9 Limites trigonométriques

- **Théorème 14** : 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$ 2) $\lim\limits_{x \to x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$

  3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

- Exercices : 1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x} = 0$ 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ 3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$

§10 Continuité d'une fonction

10.1 Définitions

- **Définition 6** : Soit x_0 un point adhérent de D_f . La fonction f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- **remarque** : on a donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow x_0 \in D_f$ **et** $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- Exemples :

- **Définition 7** : Soit x_0 un point adhérent de D_f .
  La fonction f est continue à droite en x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$.

  La fonction f est continue à gauche en x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$.

- Exemples :

- **Définition 8** : Une fonction f est continue sur l'intervalle ouvert]a ;b[si f est continue en x_0 , pour tout $x_0 \in$]a ;b[.
Une fonction f est continue sur l'intervalle fermé [a ;b] si f est continue sur]a ;b[et si f est continue à droite en a et à gauche en b .

10.2 Théorèmes

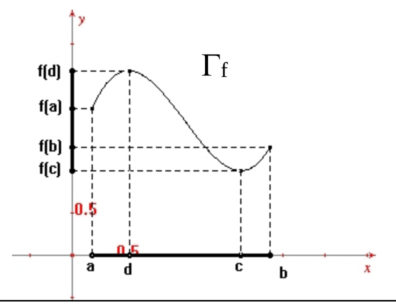
- **Théorème 15** : Si f et g sont continues en x_0, les fonctions f+g , λf , f·g et $\frac{f}{g}$ (si $g(x_0)\neq 0$) sont continues en x_0 .

- **Théorème 16** : Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$, alors g o f est continue en x_0 .

- **remarque** : Avec les théorèmes 14, 15 et 16 et les théorèmes sur les limites, on démontre que les fonctions polynômes, rationnelles, trigonométriques, racine n-ième sont continues sur leur domaine de définition.

- **Théorème 17** : Si f est continue sur l'intervalle [a ;b] , alors f ([a ;b]) est un intervalle fermé comprenant f(a) et f(b).

- **Corollaire du théorème 17** :Une fonction continue sur un intervalle fermé [a ;b] admet un maximum absolu et un minimum absolu sur cet intervalle.



- **Théorème 18** : **(de la valeur intermédiaire)**
Si f est continue sur l'intervalle [a ;b] , alors pour tout nombre y compris entre f(a) et f(b), il existe un nombre c $\in$ [a ;b] tel que f(c) = y **.**

- **Corollaire du théorème 18** : Si f est continue sur l'intervalle [a ;b] et si f(a) et f(b) sont de signes contraires, alors il existe au moins un nombre c $\in$]a;b[tel que f(c) = 0 .

- **Théorème 19** : Une fonction continue strictement croissante sur [a,b] est bijective dans [f(a); f(b)] .

- **Théorème 20** : La réciproque d'une fonction f continue et strictement croissante (resp. décroissante) dans un intervalle est une fonction f^{-1} continue et strictement croissante (resp. décroissante) dans l'intervalle correspondant.

Prolongement d'une fonction par continuité en un point :

- **Définition 9** : Lorsqu'une fonction f n'est pas définie en x_0 , si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, on peut construire

une nouvelle fonction g ainsi : $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ et } x \neq x_0 \\ \text{ou} \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \text{ et } x = x_0 \end{cases}$

On appelle cette fonction g la prolongée par continuité de f en x_0 .