FONCTIONS

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE

1 Définitions

Définition 1 Une fonction f de A vers B est une relation telle que chaque élément de l'ensemble A possède au plus une image dans l'ensemble B.

Définition 2 On appelle **fonction réelle d'une variable réelle** toute fonction de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels vers lui-même.

<u>Remarques</u>

1 Pour une fonction f, si l'on écrit f(x) pour l'image de x, l'élément x se nomme **variable**.

2 S'il n'y a pas de confusion, on utilisera l'expression simplifiée de fonction en lieu et place de fonction réelle d'une variable réelle.

Définition 3 On appelle **domaine de définition** d'une fonction f la partie Df des éléments de $\mathbb{R}$ qui ont une image par la fonction f.

Remarque

Restreinte à son domaine de définition, une fonction devient alors une application de Df vers $\mathbb{R}$

Définiton 4 On appelle racine d'une fonction f tout nombre réel x tel que $f(x) = 0$.

Définition 5 Etant donné un repère du plan, on appelle représentation graphique, ou graphique d'une fonction f l'ensemble des points $M(x, f(x))$ du plan tels que x est élément de Df.

Définition 6 Une fonction f est dite **paire** si, pour tout x de son domaine de définition Df, on a : $-x \in Df$ et $f(-x) = f(x)$.

Exercice *Le graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

Définition 7 Une fonction f est dite **impaire** si, pour tout x de son domaine de définition Df, on a: $-x \in Df$ et $f(-x) = -f(x)$.

Exercice *Le graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.*

Définition 8 Une fonction f est dite **périodique**, s'il existe un nombre réel positif p non nul tel que, pout tout x du domaine de définition Df, on a $x + p \in Df$ et $f(x + p) = f(x)$.

Le plus petit nombre p satisfaisant à cette définition est appelé la période de la fonction f.

Exercice *Si une fonction est périodique de période* p, *pour tout nombre réel de la forme* kp, *où* $k \in \mathbb{Z}^*$, *on a aussi* $f(x + kp) = f(x)$.

Remarque

Le graphique d'une fonction périodique se retrouve sur chaque sous-ensemble de son domaine correspondant à une période. On peut ainsi limiter l'étude d'une telle fonction à un sous-ensemble associé à la plus petite période.

2 Variation

Définition 9 Soit une fonction f et un intervalle I, sous-ensemble du domaine de définition Df de la fonction.

La fonction f est dite croissante sur l'intervalle I si, quels que soient les éléments x_1 et x_2 de I, on a: $(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2))$.

La fonction f est dite décroissante sur l'intervalle I si, quels que soient les éléments x_1 et x_2 de I, on a: $(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \geq f(x_2))$.

Une fonction est dite strictement croissante - respectivement strictement décroissante - si, dans les mêmes conditions, on a : $f(x_1) < f(x_2)$ respectivement $f(x_1) > f(x_2)$.

Définition 10 Une fonction est dite monotone sur un intervalle I si elle est croissante ou décroissante sur I.

Définition 11 Etant donnés deux éléments distincts x_1 et x_2 d'un intervalle I, sous-ensemble du domaine de définition Df d'une fonction f, on appelle taux d'accroissement de la fonction f entre x_1 et x_2 le nombre réel $t = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Le nombre réel $f(x_2) - f(x_1) = \Delta f$ est appelé accroissement de la fonction f entre x_1 et x_2

Le nombre réel $x_2 - x_1 = \Delta x$ est appelé accroissement de la variable x.

Remarques

1 Selon le choix de x_1 et x_2, Δx peut être négatif.

2 Lorsque x "s'accroît" de Δx, l'image $f(x)$ "s'accroît" de $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$.

THEOREME 1 Soit t le taux de variation d'une fonction f entre deux éléments distincts x_1 et x_2 d'un intervalle I inclus dans Df. On a les équivalences suivantes:

1. (f est croissante sur I) $\Leftrightarrow$ ($\forall \{x_1, x_2\} \subset I \quad t \geq 0$)
2. (f est décroissante sur I) $\Leftrightarrow$ ($\forall \{x_1, x_2\} \subset I \quad t \leq 0$)
3. (f est constante sur I) $\Leftrightarrow$ ($\forall \{x_1, x_2\} \subset I \quad t = 0$)

On a le théorème analogue pour la croissance et la décroissance stricte.

Définition 12 On dit qu'une fonction f présente un maximum en $c \in Df$, s'il existe un intervalle ouvert $I \subset Df$ et comprenant c tel que $f(x) \leq f(c)$ pour tout élément x de I.

On dit encore que $f(c)$ est un maximum de la fonction f.

Définition 13 On dit qu'une fonction f présente un minimum en $c \in Df$, s'il existe un intervalle ouvert $I \subset Df$ et comprenant c tel que $f(x) \geq f(c)$ pour tout élément x de I.

On dit encore que $f(c)$ est un minimum de la fonction f.

Remarque

On appelle extrémum d'une fonction un maximum ou un minimum de cette fonction.

THEOREME 2 Soit une fonction f définie sur un intervalle $]a\,,\,b[$ et un élément c de l'intervalle $]a\,;\,b[$.

Si f est strictement croissante sur $]a\,;\,c]$ et strictement décroissante sur $[c\,;\,b[$, alors $f(c)$ est un maximum de la fonction f.

Si f est strictement décroissante sur $]a\,;\,c]$ et strictement croissante sur $[c\,;\,b[$, alors $f(c)$ est un mimimum de la fonction f.