Les dérivées

4.1 Introduction

❑ *Vitesse et accélération*

• Lorsque l'on considère le mouvement **rectiligne** d'un point matériel **M**, la distance **d** parcourue par ce point à partir d'une position initiale est liée au temps **t** qu'il met pour se déplacer. Exprimons alors la distance **d** parcourue
durant le temps **t** par **d = f(t)** . Si l'on calcule le rapport de la distance **d** et du temps **t** mis pour la parcourir, on établit la vitesse moyenne du mobile. Cependant, la vitesse moyenne ne caractérise la vitesse que si celle-ci est constante. Si la vitesse varie, pour l'évaluer à un instant **t** donné, il suffit d'établir le rapport *distance / temps* pour un laps de temps, noté **Δt** , le plus court possible aux environs de cet instant **t**, ce qui est donné par le nombre $\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ pour un accroissement **Δt** du temps le plus petit possible .

On appelle alors **vitesse instantanée** du point M en mouvement la limite du quotient de l'accroissement du chemin parcouru **f(t+Δt) – f(t)** par l'accroissement **Δt** du temps, lorsque Δt tend vers zéro.

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \text{ que l'on note } f'(t)}$$

La vitesse dépend ainsi de l'instant **t** où on la calcule.

La fonction exprimant, dans un mouvement rectiligne non uniforme (vitesse non constante) , la vitesse d'un mobile
M à l'instant **t** est la fonction dérivée de la fonction décrivant le déplacement.

De même, si l'on désire établir à son tour l'accroissement de la vitesse à un instant **t**, c'est à dire l'accélération (ou la décélération), il suffit de calculer la dérivée de la fonction vitesse.

$$\boxed{a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = v'(t)}$$

Ainsi, la dérivée seconde de la fonction déterminant le déplacement d'un mobile exprime l'accélération du mouvement à chaque instant **t** :

$$\boxed{a(t) = v'(t) = f''(t)}$$

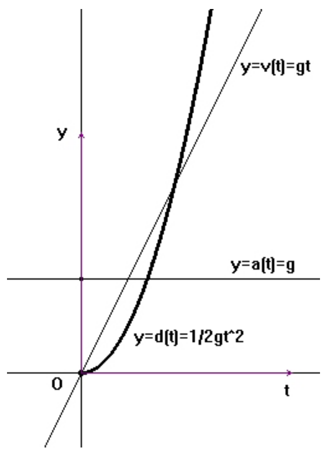
• Exemple : Un corps M en chute libre, lâché sans vitesse initiale, parcourt en t secondes la distance d donnée en mètres par $d = f(t) = \frac{1}{2} g\, t^2$, où $g \cong 9{,}81 \text{ m/s}^2$.

Ainsi sa vitesse instantanée au temps t sera donnée par :

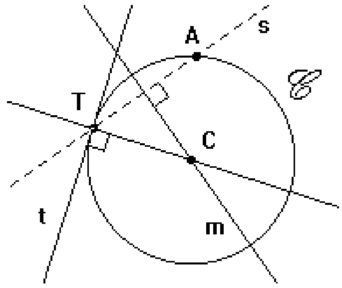
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} g \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t^2 + 2\Delta t \cdot t + (\Delta t)^2) - t^2)}{\Delta t}$$

$$= \frac{1}{2} g \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2\Delta t \cdot t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} g \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = \frac{1}{2} g \cdot (2t) = gt \quad \text{, et}$$

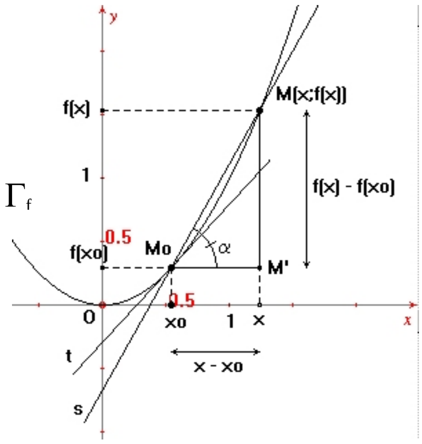
$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g \cdot (t+\Delta t) - g \cdot t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g \cdot t + g \cdot \Delta t - g \cdot t}{\Delta t} = g$$



- ❑ *Tangente à une courbe*



- Rappel : Soit un cercle **C**(C ;r) et une droite t : la droite t est **tangente** au cercle **C** ssi $t \cap \mathbf{C} = \{T\}$. De plus, on sait que t est tangente à **C** ssi $(CT) \perp t$.
- Soit un point $A \in \mathbf{C}$, avec $A \neq T$, et la sécante s = (AT) et la médiatrice $m_{[AT]}$; on va définir la **tangente** t au cercle **C** au point T par la position limite de la sécante s lorsque le point A, "glissant" sur le cercle **C**, tend vers le point T. Lorsque A "est en T" , la sécante "est" la tangente t et la médiatrice $m_{[AT]}$ "est" le diamètre (CT).



- Soit Γ_f le graphique d'une fonction f et M_0 $(x_0 ;f(x_0))$ un point de Γ_f tel que f est continue sur un intervalle ouvert I contenant x_0 .

  Définition : La **tangente** t à Γ_f au point M_0 est la limite de la droite s = (M_0M), où M(x ;f(x)) est un point de Γ_f et $x \in I$, lorsque M tend vers M_0 .
- Soit m la pente de la sécante s = (M_0M) ;

  on sait que $m = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et que $m = \tan(\alpha)$ où $\dot{\alpha} = m\,(\odot M'M_0M)$;

  de plus $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est aussi le taux d'accroissement de f lorsque la variable passe de x_0 à x .

4.2 Définitions

- ❑ *Nombre dérivé*

- Définition : Soit f une fonction et x_0 un point adhérent au Df.

  La fonction f est dite dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe dans $\mathbb{R}$.

  Ce nombre réel, noté $f'(x_0)$, est appelé nombre dérivé de f en x_0

  et on a $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

- Interprétation géométrique : Le nombre dérivé $f'(x_0)$ donne la pente de la tangente t au graphique Γ_f de f au point M_0 d'abscisse x_0 .

- Autres notations : En posant $\Delta x = x - x_0$ et $\Delta f = f(x) - f(x_0)$,

  on a $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

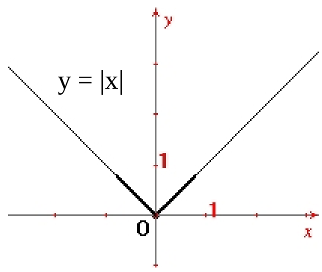
- Définition : Soit f une fonction et x_0 un point adhérent au Df.
  La fonction f est dite dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0

  si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f_d'(x_0)$ existe dans $\mathbb{R}$ (resp. si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f_g'(x_0)$ existe dans $\mathbb{R}$) .

  Exemple : Si f(x) = |x| , alors

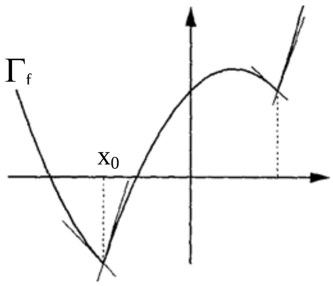
  $f_d'(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{|x| - 0}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x}{x} = 1$ et

  $f_g'(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{|x| - 0}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{-x}{x} = -1$



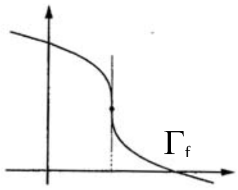
On dit que le graphique Γ_f de f admet un point anguleux en x = 0 .

- Remarque : Si la limite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ n'existe pas,

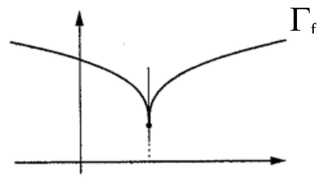


a) soit $f_d'(x_0) \neq f_g'(x_0)$ et le graphique Γ_f admet un **point anguleux** $(x_0 ; f(x_0))$.

b) soit $\lim\limits_{x \to x_0} |f'(x)| = +\infty$ et le graphique Γ_f admet une tangente verticale au point $(x_0 ; f(x_0))$.
Si de plus $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ n'existe pas, le graphique
admet un **point de rebroussement** .



tangente verticale, pas de point de rebroussement



tangente verticale, point de rebroussement

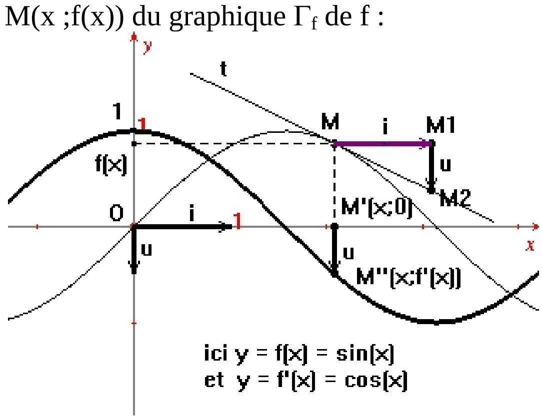
- *Fonction dérivée*

- Définition : Une fonction f est dite dérivable sur un intervalle fermé [a,b] de ℝ si elle est dérivable en x_0, pour tout $x_0 \in]a,b[$, et si elle est dérivable à droite en a et à gauche en b .
On définit alors la **fonction dérivée** de f sur [a,b] par : $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f'(x)$

- Construction géométrique point par point de la fonction dérivée de f :

Soit une fonction f dérivable un intervalle I de ℝ et un point M(x ;f(x)) du graphique Γ_f de f :

on construit le point M' = $p_\perp$(M) ∈ (OI),
le point $M_1 = t_{\text{Å},i}$ (M) et le point $M_2 = t_{\text{Å},u}$ (M_1) ,
où $\text{Å},u = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}$ et m = f'(x) pente de la tangente t à Γ_f au point M ; finalement on construit le point M''= $t_{\text{Ä},M1M2}$ (M') ; alors le graphique $\Gamma_{f'}$ est l'ensemble des points M'' du plan lorsque x décrit l'intervalle I .



- Exercices : Calculer $f'(x_0)$, avec $x_0 \in D_f$, et donner $D_{f'}$ si

a) f(x) = c (c ∈ ℝ) b) f(x) = ax + b c) $f(x) = ax^2 + bx + c$ d) $f(x) = x^3$

e) $f(x) = x^4$ d) $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) g) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ h) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

i) $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) j) $f(x) = \sqrt{x}$ k) f(x) = sin(x) l) f(x) = cos(x)

m) f(x) = tan(x)

4.3 Théorèmes

- *Théorèmes pour le calcul des dérivées*

- Théorème 1 : Si f est une fonction dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0 .

Remarque : La réciproque est fausse ; une fonction continue en x_0 peut ne pas être dérivable en x_0 ;
exemple : la fonction valeur absolue est continue en 0, mais non dérivable en 0 .

- Théorème 2 : Soit f et g sont deux fonctions dérivables en x_0 , x_0 un point adhérent de $D_f \cap D_g$,

les fonctions f+g et f·g sont dérivables en x_0 ; si de plus $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et on a :

a) $(f + g)'(x_0) = f '(x_0) + g '(x_0)$ b) $(f\cdot g)'(x_0) = f '(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$

c) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Corollaires au théorème 1: a) $(f - g)'(x_0) = (f '- g')(x_0)$ b) $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \left(\frac{-g'}{g^2}\right)(x_0)$

c) $(f\,g\,h)'(x_0) = (f 'g h + f g' h + f g h')(x_0)$ d) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda\cdot f '(x_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

- Théorème 3 : Si f est une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $f(x_0)$,
alors la fonction (g o f) est dérivable en x_0 et on a $(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)]\cdot f '(x_0)$.

Corollaire au théorème 2 : $(f^n)'(x_0) = n\, f^{n-1}(x_0)\, f '(x_0)$

Exemple : Soit f et g définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \sin(x)$ alors

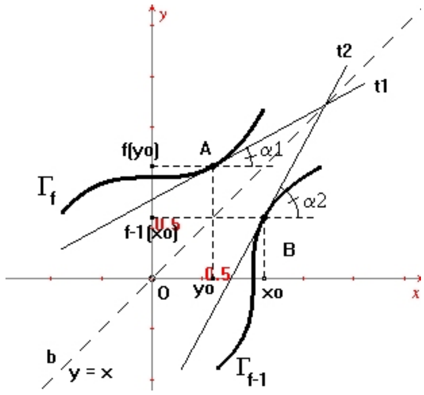
$(f \circ g)'(x) = [\sin(\sqrt{x})]' = \cos(\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})' = \cos(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ si $x \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$,

$(g \circ f)'(x) = [\sqrt{\sin(x)}]' = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x)}}\cdot(\sin(x))' = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$ si x est tel que $\sin(x) \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$,

- Théorème 4 : Si f est une fonction bijective et continue sur un intervalle ouvert contenant y_0 et
si f est dérivable en y_0 et si $f '(y_0) \neq 0$, alors la bijection réciproque f^{-1}
est dérivable en $x_0 = f(y_0)$ et on a $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}$.

Exemple : Soit f définie par $f(x) = x^2$ et $x \in \mathbb{R}_+$, alors $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, (et on a $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2$)
alors $(\sqrt{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{(y^2)'} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Interprétation géométrique : Les graphiques de deux fonctions bijectives et réciproques f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la bissectrice b d'équation y = x . Ainsi, si la pente de la tangente t_1 au graphique Γ_f en $A(y_0 ;f(y_0))$ est $m_{t_1} = f'(y_0)$ et la pente de la tangent t_2 au graphique $\Gamma_{f^{-1}}$ en $B(x_0;f^{-1}(x_0))$ est $m_{t_2} = (f^{-1})'(x_0) = \dfrac{1}{f'(y_0)} = \dfrac{1}{m_{t_1}}$.



Or $\tan(\alpha_1) = m_{t_1}$ et $\tan(\alpha_2) = m_{t_2}$,où $\dot{\alpha}_1$ et $\dot{\alpha}_2$ sont les mesures des angles directeurs des tangentes t_1 et t_2 .

On a alors $m_{t_2} = \dfrac{1}{m_{t_1}} \Leftrightarrow \tan(\alpha_2) = \dfrac{1}{\tan(\alpha_1)} = \cot(\alpha_1) = \tan(\dfrac{\pi}{2} - \alpha_1) \Leftrightarrow \dot{\alpha}_2 = \dot{\alpha}_1 - \dot{\dfrac{\pi}{2}}$.

- Théorème 5 : $(x^q)' = q\,x^{q-1}$, $\forall q \in \mathbb{Q}^*$.

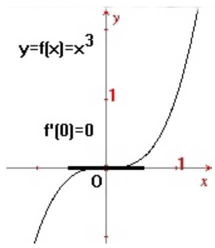
Exemple : si $f(x) = \sqrt[3]{x}$, alors $f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = (x^{1/3})' = \dfrac{1}{3}\, x^{(1/3-1)} = \dfrac{1}{3}\, x^{-2/3} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

- *Théorèmes fondamentaux*

- Théorème 6 : (théorème de Fermat)

  Si f est une fonction dérivable en x_0 et si f admet un extremum en x_0 , alors $f'(x_0)=0$

contre exemple :

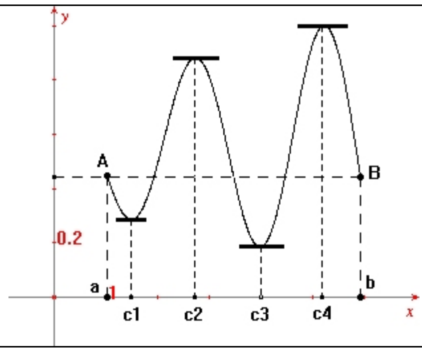


Remarque : La réciproque est fausse (cf. figure ci-contre)
La fonction f définie par $y = f(x) = x^3$ n'admet pas d'extremum en x = 0, mais $f'(0) = 0$.

- Théorème 7 : (théorème de Rolle)

  Si f est une fonction continue sur l'intervalle [a,b], dérivable sur l'intervalle]a,b[et si f(a) = f(b), alors il existe au moins un nombre $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Interprétation géométrique : il existe au moins entre les points
A(a ;f(a)) et B(b ;f(b)) un point M(c ;f(c)) du graphique Γ_f en lequel la tangente t est horizontale.



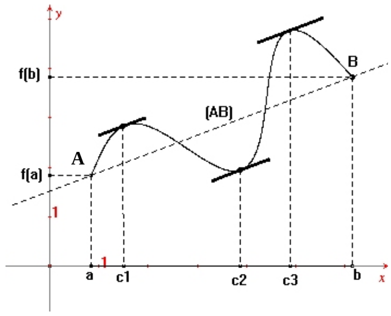
Remarque : Si f(a) = f(b) = 0, alors f ' admet au moins une racine entre deux racines de f .

- Théorème 8 : (théorème de Lagrange ou théorème des accroissements finis)

  Si f est une fonction continue sur l'intervalle [a,b], dérivable sur l'intervalle]a,b[,

  alors il existe au moins un nombre $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Interprétation géométrique : il existe au moins entre les points A(a ;f(a)) et B(b ;f(b)) un point M(c ;f(c)) du graphique Γ_f en lequel la tangente t est parallèle à la sécante (AB).



Corollaire au théorème 8 : Si $f'(x) = 0$, pour tout $x \in [a,b]$, alors $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in [a,b]$.

4.4 Applications de la dérivée

- Théorème 9 : (dérivées et variation d'une fonction)
  Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle fermé [a,b] , alors
  1) f est croissante sur $[a,b] \Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0$, pour tout $x \in [a,b]$;
  2) f est décroissante sur $[a,b] \Leftrightarrow f'(x) \leqslant 0$, pour tout $x \in [a,b]$;
  3) f est constante sur $[a,b] \Leftrightarrow f'(x) = 0$, pour tout $x \in [a,b]$.

- Théorème 10 : (condition suffisante pour un extremum)
  Soit f une fonction continue sur l'intervalle [a,b] et dérivable sur l'intervalle $]a,b[- \{c\}$, où $c \in\ ]a,b[$. Si la fonction dérivée f ' prend un signe constant sur]a,c[et le signe opposé sur]c,b[, alors f admet un extremum en c .

Corollaire au théorème 10 : Si f est dérivable sur]a,b[et $c \in\ ]a,b[$, et si f ' s'annule et change de signe en x = c , alors c est un extremum de f.

- Théorème 11 : (théorème de Cauchy)
  Soit f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle]a,b[et $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a,b[$,
  alors il existe au moins un nombre $c \in\ ]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

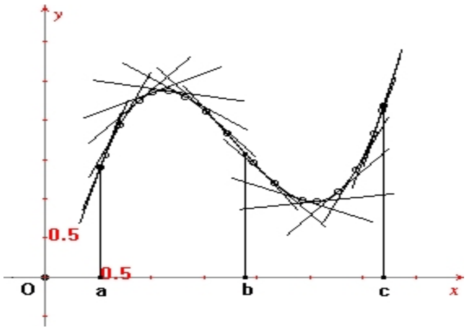
- Théorème 12 : (théorème de l'Hospital)
  Soit f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle]a,b[et $x_0 \in]a,b[$ telles que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$.
  Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$.
  Si $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Remarque : La règle de l'Hospital s'applique aussi aux calculs de limites du type
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ >}}$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ <}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}$.

4.5 Dérivée seconde

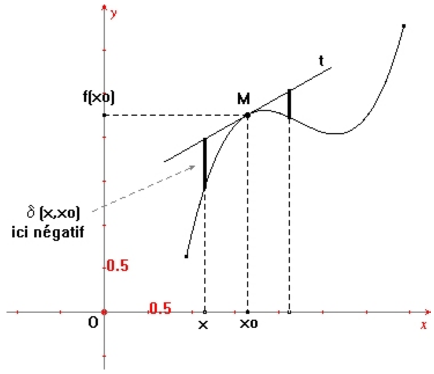
- Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Si la fonction dérivée f ' est dérivable sur I, sa dérivée , notée f " , est appelée la **dérivée seconde** de f.

- Approche de l'interprétation géométrique de la dérivée seconde :

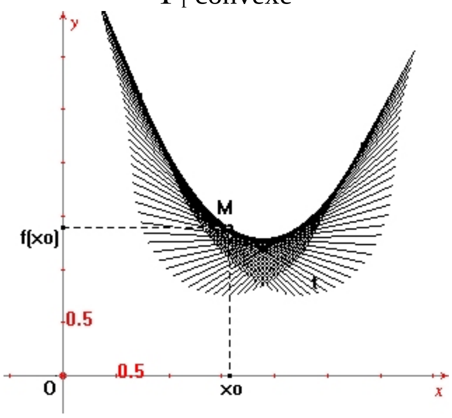


Soit une fonction f admettant une dérivée seconde sur l'intervalle [a,c] .
Les pentes des tangentes successives à Γ_f en M(x ;f(x)) décroissent lorsque x varie de a à b, puis croissent lorsque x varie de b à c .
Or la pente des tangentes est donnée, point par point, par le nombre dérivé f '(x) en x ; donc si la pente décroît, la dérivée de f ', c'est à dire f " est négative (thm. 9) pour tout x de [a,b] et si la pente croit , f " est positive, pour tout x de [b,c] . On dira que Γ_f est concave sur [a,b] et convexe sur [b,c] .
Le point (b ;f(b)) de Γ_f sépare la partie concave de Γ_f de sa partie convexe. La dérivée f ' admet ici un minimum en b, car de décroissante dans [a,b] elle devient croissante dans [b,c]. La dérivée seconde f " change donc de signe en b. Nous dirons que le point (b ;f(b)) est **un point d'inflexion** de Γ_f ou que la fonction f admet un point d'inflexion en x = b.

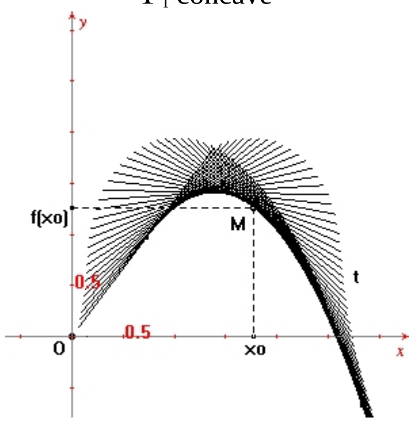
- Définition : Soit f dérivable sur un intervalle [a,b].
La tangente t au graphique Γ_f au point $M(x_0 ;f(x_0))$ admet l'équation t : $y - f(x_0) = f\,'(x_0)\cdot(x - x_0)$, ou
t : $y = f(x_0) + f\,'(x_0)\cdot (x - x_0)$.
Posons $\delta(x,x_0) = f(x) - [f(x_0) + f\,'(x_0)\cdot (x - x_0)]$.
Le graphique Γ_f est **convexe** sur [a,b] $\Leftrightarrow$ $\delta(x,x_0) \geqslant 0$, $\forall$ $\{x ;x_0\} \subset [a,b]$;
Le graphique Γ_f est **concave** sur [a,b] $\Leftrightarrow$ $\delta(x,x_0) \leqslant 0$, $\forall$ $\{x ;x_0\} \subset [a,b]$.



Γ_f convexe

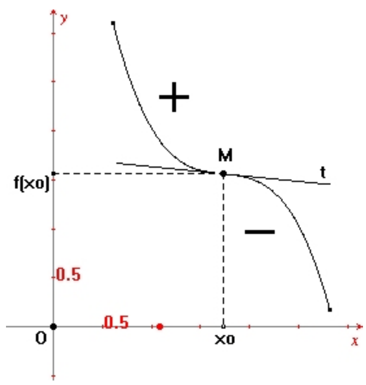


Γ_f concave



- Définition : Le graphique Γ_f d'une fonction f admet un **point d'inflexion** au point $M(x_0 ;f(x_0))$ s'il existe deux nombres a et b tels que Γ_f soit convexe sur $[a,x_0]$ et concave sur $[x_0,b]$, ou concave sur $[a,x_0]$ et convexe sur $[x_0,b]$.

remarque : la tangente t à Γ_f coupe Γ_f au point d'inflexion .



- Théorème 13 : (condition suffisante pour déterminer la concavité)
  Soit f une fonction admettant une dérivée seconde dans un intervalle [a,b] .
  Si $f''(x) \geqslant 0$ (resp. $f''(x) \leqslant 0$) pour tout $x \in [a,b]$, alors Γ_f est convexe (resp. concave) dans [a,b] .

Corollaire au théorème 13 : (condition suffisante pour un point d'inflexion)
Soit f une fonction admettant une dérivée seconde dans un $[a,b] - \{c\}$.
Si $f''(x) \geqslant 0$ (resp.$\leqslant 0$) pour tout $x \in]a,c[$ et $f''(x) \leqslant 0$ (resp. $\geqslant 0$) pour tout $x \in]c,b[$,
alors Γ_f admet un point d'inflexion au point M(c ;f(c)) .

Remarque : De plus, si $f''(c)$ est défini , alors $f''(c) = 0$.