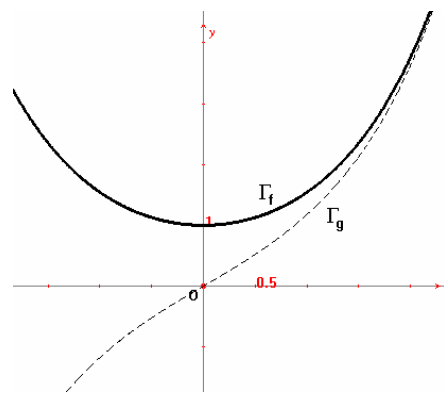


§11 Asymptotes

11.1 Introduction

Soit Γ_f le graphique d'une fonction f et $M(x; f(x))$ un point de Γ_f .
 Si l'une des limites a ou b de l'expression $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ est infinie,
 on dit que l'une des coordonnées de M tend vers l'infini et
 que le point M est à l'infini.

Cette expression ne nous renseigne pas sur l'allure du graphique Γ_f .
 On compare alors le graphique Γ_f de f avec celui d'une fonction g plus
 simple et dont on connaît Γ_g dans la région considérée.
 Ces courbes auxiliaires s'appellent des **asymptotes**.



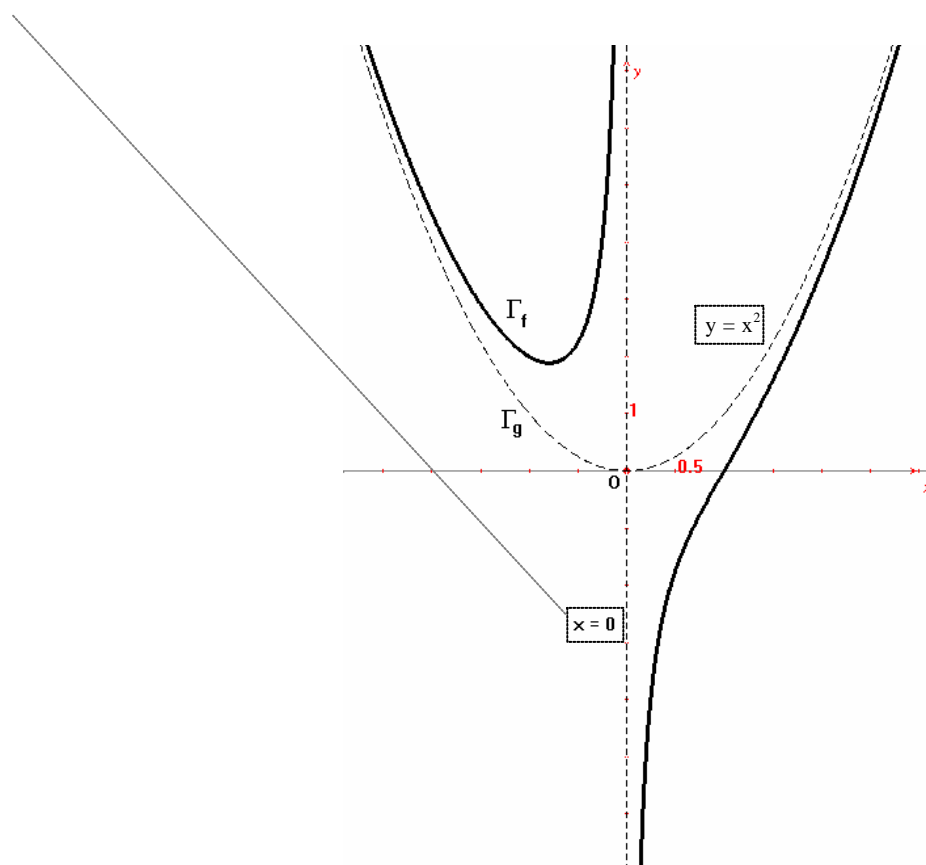
11.2 Asymptotes verticales

Définition 10 : La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à droite du graphique Γ_f
 d'une fonction f si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$
 ou est une asymptote verticale à gauche du graphique Γ_f
 d'une fonction f si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

Exemple : soit la fonction f définie par $y = f(x) = \frac{x^3 - 1}{x}$. (cf. figure ci-dessous)

On a ici $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 1}{x} = \left(\frac{-1}{0^+} \right) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 1}{x} = \left(\frac{-1}{0^-} \right) = +\infty$ et donc

la droite $x = 0$ est asymptote verticale du graphique Γ_f .



11.3 Asymptotes à l'infini

Définition 11 : Soit f et g deux fonctions. On dit que le graphique Γ_g de la fonction g est asymptote à l'infini du graphique Γ_f de la fonction f si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$.

Exemple et interprétation graphique :

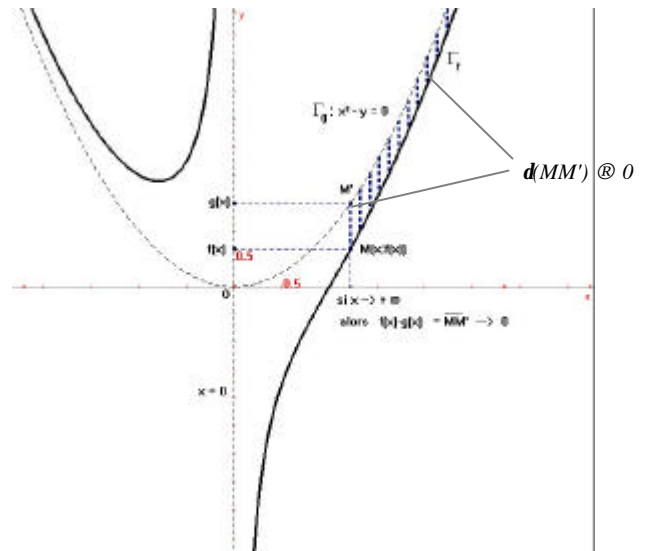
Reprenons l'exemple précédent : $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x}$. Le graphique Γ_g de la fonction g définie par $y = g(x) = x^2$ est asymptote (curviligne) de Γ_f car

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 - 1}{x} - x^2 \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 - 1 - x^3}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-1}{x} \right] = 0$$

Soit $M(x; f(x)) \in \Gamma_f$ et $M'(x; g(x)) \in \Gamma_g$ alors

$$\delta(MM') = |\overline{MM'}| = |f(x) - g(x)| = \left| \frac{1}{x} \right|$$

et le graphique Γ_g est asymptote à l'infini de Γ_f si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \delta(MM') = 0$.



Le graphique Γ_g de la fonction g est asymptote de Γ_f si la distance des points M et M' tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$).

Calcul des asymptotes aux infinis :

1) Si f est une fonction rationnelle définie par $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, alors il existe deux fonctions polynômes

$$q(x) \text{ et } r(x) \text{ telles que } f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)} \text{ et } \deg(r) \leq \deg(Q).$$

$$\text{Ainsi } f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)} \Leftrightarrow f(x) - q(x) = \frac{r(x)}{Q(x)} ; \text{ comme } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{r(x)}{Q(x)} = 0 \text{ (théorème du cours)}$$

on a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - q(x) = 0$ et donc, par définition, le graphique Γ_q de la fonction q est asymptote du graphique Γ_f de la fonction f .

2) Si f n'est pas une fonction rationnelle, alors on peut rechercher les éventuelles asymptotes affines aux infinis avec le théorème suivant :

Théorème 21 : Si Γ_f admet une asymptote affine à l'infini d'équation $y = g(x) = mx + h$,
 alors $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right]$ et $h = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$ ou
 alors $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right]$ et $h = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx]$.