

# L'ASTROÏDE

*Courbe étudiée par Jean Bernoulli (1667 - 1748) ; D'Alembert, 1748.*

*Nom donné par Littrow en 1838.*

*"Astroïde" signifie "en forme d'astre" (même étymologie qu'astéroïde : qui ressemble à un astre !)*

*Autres noms : H4 (hypocycloïde à quatre rebroussements), cubocycloïde.*

*voir le site : <http://perso.club-internet.fr/rferreol/encyclopedie/courbes2d/astroid/astroid.shtml> ou*

*<http://www-cabri.imag.fr/cabrijava/double-gen-astroid.html> ou*

*<http://www.crdp.ac-grenoble.fr/imel/spi/Lycee/65/fiche.htm>*

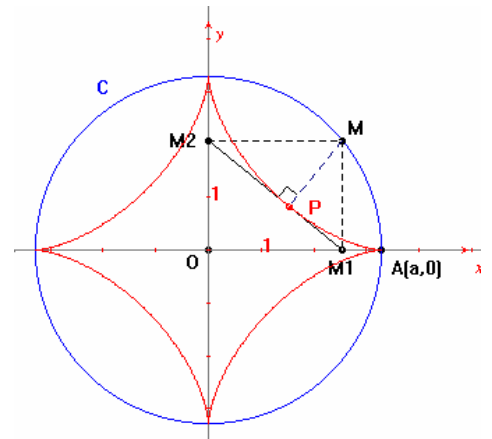
- a) **Construire avec Cabri l'astroïde** par sa définition géométrique suivante : (dans un RON  $R = (O, \hat{A}, \hat{A})$ )  
 Soit le cercle  $C$  centré en  $O$  et de rayon  $[OA]$  et  $A(a,0) \in [OI]$  et un point  $M$  du cercle  $C(O, OA)$  :  
 - construire les points  $M_1 = p_{\perp}(M) \in (OI)$  et  $M_2 = p_{\perp}(M) \in (OJ)$  ;  
 - construire  $P$  tel que  $P = p_{\perp}(M) \in (M_1M_2)$ .  
 L'ensemble des points  $P$  obtenus lorsque  $N$  parcourt le cercle  $C$  est une astroïde .

- b) Soit  $\angle t = \angle(\vec{OA}, \vec{OM})$  et  $t = m(\angle t)$ , démontrer que la représentation paramétrique de l'astroïde est

$$\begin{cases} x = a \cos^3(t) \\ y = a \sin^3(t) \end{cases} ;$$

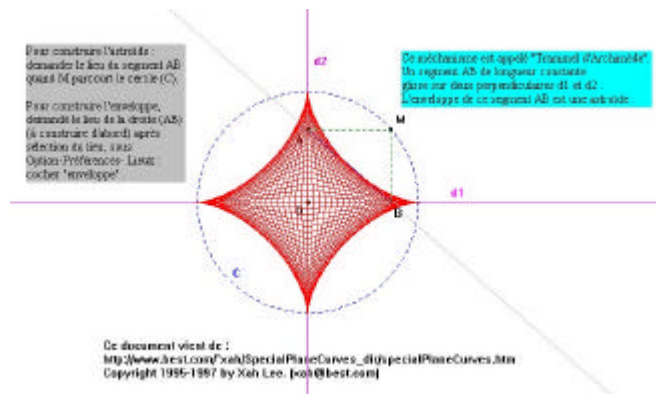
puis étudier cette courbe ;

- c) Donner une équation cartésienne de cette courbe ;  
 d) Calculer l'aire de la surface délimitée par l'astroïde ;  
 e) Calculer le périmètre de l'astroïde ;  
 f) Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation autour de  $(OI)$  ou de  $(OJ)$  de l'astroïde.



Autres constructions de l'astroïde :

- 1) Ce mécanisme est appelé "[Trammel d'Archimède](#)". Un segment  $[A,B]$  de longueur constante glisse sur deux perpendiculaires  $d_1$  et  $d_2$ . L'enveloppe de ce segment  $AB$  est une astroïde .



- 2) L'astroïde est une [hypocycloïde](#) : lieu géométrique d'un point  $M$  d'un cercle  $C_1(O,r)$  de rayon  $r$  roulant sans glisser sur un cercle  $C_2(O,R)$  de rayon  $R$ , avec  $r < R$  à l'intérieur de celui-ci si  $r = R/4$ . (pour un roulement extérieur, on parle d'épicycloïde).

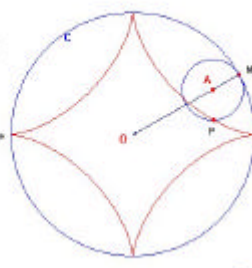
## hypocycloïde

Rayon du grand cercle:  $R = 3,63$  cm  
 Rayon de la roulette:  $R_1 = 0,91$  cm

L'astroïde peut être définie comme le lieu géométrique d'un point de la roulette.

Donner la calculatrice et double-cliquer sur le bouton "Roulette".  
 Modifiez le rayon (par 3).  
 L'astroïde devient un décalé.  
 Expérimentez avec d'autres valeurs de ce rayon.

La courbe initiale peut aussi être représentée sous une forme paramétrique si on a  $m4(0,571)$ ,  $m4(0,571)$ .



Déplacez M sur le cercle C