CHAPITRE 1 – STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

Jusqu'à maintenant, les mathématiques (l'analyse comme la géométrie) se pratiquent dans des espaces de dimension 2 ou 3 (le plan ou l'espace physique). Très vite apparaît la nécessité de travailler dans des espaces de dimension supérieure, ne serait-ce que pour modéliser des problèmes faisant intervenir un nombre de variables plus grand que 2. Les espaces de dimension plus grande que 3 échappent totalement à la perception. Même si on peut, par projection sur $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, entrevoir l'aspect d'objets mathématiques vivants dans $\mathbb{R}^4$ ou plus, on ne peut les visualiser dans toute leur globalité. Aussi faut-il un cadre théorique pour pouvoir aborder les dimensions plus grandes. La théorie des espaces vectoriels a pour objet de fixer cette théorie.

CHAPITRE 2 – APPLICATION LINEAIRE

Les applications linéaires sont parmi les plus importantes en mathématiques. Elles interviennent dans de nombreuses situations. En analyse, elles servent par exemple à approximer localement des fonctions ou des équations différentielles. En algèbre, on peut les utiliser pour représenter des équations. En géométrie, elles modélisent les symétries d'un objet...

CHAPITRE 3 – MATRICE D'UNE APPLICATION LINEAIRE

L'attitude du mathématicien face à un problème est souvent d'essayer de déplacer le champ lexical dans lequel est énoncé ce problème pour un autre dans lequel il se démontrera plus aisément.

Considérons par exemple le problème consistant à rechercher les zéros d'une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ce problème peut se résoudre par les moyens algébriques habituels de résolution des équations. Mais cette méthode n'est malheureusement pas toujours assurée du succès. Aussi faudra-t-il peut être tenter d'autres approches. On pourra par exemple transformer le problème qui consiste à résoudre $f(x) = 0$ en celui de trouver le point fixe de $g(x) = f(x) + x$. On passera alors du champ lexical de l'algèbre à celui de l'analyse et des suites réelles. On mettra ainsi les outils de l'analyse à la disposition d'un problème algébrique.

Certaines propriétés qui au départ sont des purs produits d'une théorie donnée n'ont pu être démontrées que dans le cadre d'une autre théorie. Nous pensons par exemple au théorème fondamental de l'algèbre qui ne possède aucune démonstration qui ne recourt à l'analyse.

Parlons aussi du grand théorème de Fermat. Une des raisons du fait qu'il a résisté aux assauts des plus grands mathématiciens de ces derniers siècles est très certainement que les mathématiques n'étaient pas prêtes jusqu'à encore récemment à l'énoncer dans un langage qui permette sa démonstration. Il a fallu élaborer, entre autre, la géométrie algébrique et développer les théories sur les courbes modulaires et les courbes elliptiques pour pouvoir le démontrer.

C'est d'ailleurs le (seul?) mérite de ce théorème que d'avoir servi à la création d'une nouvelle branche des mathématiques. Tout cela pour insister sur l'importance de multiplier les représentations pour un objet mathématique donné. L'écriture matricielle consiste justement en une autre représentation des applications linéaires.