Construction de l'ensemble $\mathbb{R}$

∞ Base intuitive

Considérons les deux affirmations suivantes :

1) Si la température d'une pièce passe de 18° à 21° en une heure, il y a eu au moins un instant pendant cette heure où cette température a été égale à 20°.
2) Quand une balle de tennis passe d'un côté à l'autre du court, il y a un instant où son centre de gravité est exactement au dessus du filet.

Ces affirmations relèvent du principe de continuité qui reflète notre impression sur la "nature" continue de grandeurs comme le temps, la température ou la position d'un objet dans l'espace. Elles ne sont guère vérifiables expérimentalement. On accumulerait plutôt des preuves du contraire ! En visionnant le film d'une partie de tennis image par image, la probabilité est nulle d'en trouver une où le centre de la balle soit exactement au dessus du filet. Le principe de continuité n'est qu'une vue de l'esprit, une sorte d'exigence du raisonnement.

Reste à trouver un système de nombres maniable et logiquement cohérent dans lequel le principe de continuité soit vrai. Historiquement, ce fut une tâche difficile qui a duré plus de 2000 ans et ne fut achevé qu'à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. (théorie des coupures de Richard Dedekind , 1831 –1916)

Le corps des nombres réels ($\mathbb{R}$,+, $\cdot$, $\leqslant$) est l'aboutissement de ces longs efforts. Il est exactement construit pour que ce principe de continuité fonctionne. Les mathématiciens en ont plusieurs constructions équivalentes.

Remarque : Si la construction des nombres réels ne s'est achevée qu'à la fin du XIX$^{\text{ème}}$siècle, on n'a pas attendu jusque-là pour faire des calculs ! Les arabes, puis les Italiens, ont développé au Moyen-Age le calcul algébrique que l'on connaît avec des nombres rationnels et des expressions comme $\sqrt{u}$ *, etc… Il s'agit de calcul formel. On ne s'occupe pas de savoir ce que désigne le symbole* $\sqrt{u}$ *. Il est traité comme une variable de polynôme, sauf qu'il satisfait à la relation* $\left(\sqrt{u}\right)^2 = u$.

∞ Axiome des segments emboîtés

Les situations rencontrées précédemment ($\sqrt{2}$ comme fraction continue, le nombre d'or) sont des cas particuliers de la situation suivante :
Nous avons construit une suite de segments (intervalles fermés) de nombres réels (rationnels dans nos deux exemples) $S_0 = [a_0 ; b_0]$, $S_1 = [a_1 ; b_1]$, $S_2 = [a_2 ; b_2]$, … , $S_n = [a_n ; b_n]$, …
suite qui possède les deux propriétés suivantes :

1) pour tout entier naturel n on a : $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$, c'est à dire $S_n \supset S_{n+1}$;
2) on peut prendre n assez grand pour que le nombre positif $b_n - a_n$ soit aussi petit que l'on voudra. Mathématiquement, nous exprimerons cette condition sous la forme :

$$\forall p \in \mathbb{N} , \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tel que } 0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \frac{1}{p} .$$

Nous dirons que toute suite S_0 , S_1 , S_2 , … ,S_n , …de segments de nombres réels possédant les deux propriétés précédentes est une **suite de segments emboîtés** de nombres réels.

Nous admettons l'axiome suivant pour ($\mathbb{R}$, + , × , $\leqslant$) :

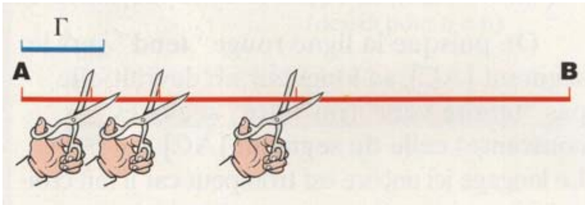
Pour toute suite de segments emboîtés de nombres réels   ***il existe un nombre réel unique appartenant à tous les segments de la suite.***

A partir cet axiome, on peut démontrer ce théorème :

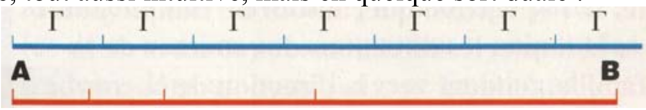
Théorème : Pour tout nombre réel **a** il existe un entier naturel **n** tel que **a < n** .
(On dit que l'ordre total sur $\mathbb{R}$ est archimédien.)

∞ Un peu d'histoire

Chez Euclide (≈330 av. J.-C. – ≈275 av. J.-C.) dans son dixième livre des « Éléments d'Euclide » (qui en contiennent 13), on trouve la proposition I :



Étant donnés deux grandeurs inégales Γ et AB, la grandeur AB étant la plus grande.
Si l'on retranche de AB une partie plus grande que sa moitié et qu'on fasse toujours de même, alors on arrivera à un moment donné à une grandeur plus petite que la grandeur Γ.
Cette propriété semble être tout à fait **intuitive** et ne semble pas réclamer de démonstration. Mais, justement, ce qui est remarquable, chez Euclide, c'est qu'il lie cette propriété à une autre, tout aussi intuitive, mais en quelque sort duale :

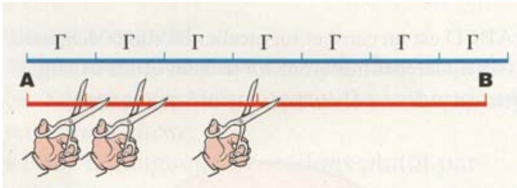


A force de reporter la longueur Γ , on arrivera à dépasser n'importe quelle longueur donnée à l'avance.
(les mathématiciens modernes ont donné à cette propriété le nom d'**Axiome d'Archimède**).


Euclide


Archimède

> C'est bien là en effet que commence le génie géométrique grec : expliciter la liaison logique entre deux intuitions qui paraissent d'abord indépendantes, parce qu'imposées par des faits.



Donc : en divisant AB par deux, autant de fois qu'il faut reporter Γ pour dépasser AB, on devient plus petit que Γ .
Autrement dit, s'il faut reporter n fois Γ pour dépasser AB, on a $n\Gamma > AB$ et donc $\frac{AB}{2^n} < \Gamma$.

En l'analysant aujourd'hui, on reconnaît dans la proposition et la démonstration d'Euclide, deux intuitions épistémologiques fondamentales :

PREMIÈRE INTUITION : la liaison entre l'infini et la notion de limite finie, telle que la traduit Euclide en imaginant un processus de découpage potentiellement infini.

Précisément la propriété d'Archimède :	**De cet énoncé (de gauche) Euclide déduit que** :
« *Pour tout Γ, il existe une valeur de n au-delà de la quelle nΓ dépasse tout nombre AB donné à l'avance* » traduit exactement cette phrase « *nΓ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini* » en abrégé : $\lim\limits_{n \to +\infty} n\Gamma = +\infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, c'est à dire « *il existe une valeur de n au-delà de laquelle* $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ *devient inférieur à tout nombre Γ donnée à l'avance* »

La manière dont s'exprime l'énoncé d'Euclide (en haut à gauche), traduit la **DEUXIEME INTUITION** :
il est possible de définir la notion de **Limite** sans référence **explicite** à l'infini lui-même. Et c'est bien ainsi que fera Weierstrass, en 1865, lorsqu'il donnera la définition tant recherchée depuis des siècles :

« La suite de nombres u_n admet une limite ℓ » si et seulement si « Pour tout ε positif, il existe un entier N, tel que, lorsque n dépasse N, les nombres u_n se trouvent entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$ » ou en langage symbolique :

la suite u_n tend vers la limite ℓ si n tend vers l'infini $\Leftrightarrow \forall N>0 , \exists \varepsilon>0$ **tel que** $n > N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$.

Car la notion de limite mit très longtemps à se préciser dans l'histoire des mathématiques. Des progrès décisifs ne la firent émerger que dans le courant du XVII^e siècle. (voir par exemple chez Newton dans ses *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, édité en 1687)

Récapitulation des propriétés de $\mathbb{R}$. Distinction de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{Q}$:

1) La structure ($\mathbb{R}$, + , × , $\leqslant$) est un corps commutatif totalement ordonné (15 axiomes).
$\mathbb{R}$ admet aussi l'axiome des segments emboîtés.

2) La structure ($\mathbb{Q}$, + , × , $\leqslant$) est un corps commutatif totalement ordonné (15 axiomes).
$\mathbb{Q}$ ne vérifie pas l'axiome des segments emboîtés. En effet, si pour toute suite de segments emboîtés S_n de nombres rationnels il existait un nombre rationnel unique appartenant à tous les segments S_n, on aurait $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ est une partie stricte de $\mathbb{R}$. ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$).
Les nombres réels appartenant à $\mathbb{R}$-$\mathbb{Q}$ sont appelés **nombres irrationnels**.
Peut-on "classifier" ces nombres irrationnels ?
$\sqrt{2}$ est une solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$; on dit que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel **algébrique**, car solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers.
Si l'on considère une équation polynomiale de degré n : $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n = 0$
où les coefficients a_0, a_1, a_2, … a_n sont des entiers, toute racine irrationnelle d'une telle équation est dite **algébrique**. Existe-t-il des nombres irrationnels non algébriques ?

3) On sait que Card ($\mathbb{Q}$) = $\aleph_0$ et Card ($\mathbb{R}$) = $\aleph_1$. Cantor a démontré que l'ensemble des nombres irrationnels algébriques forment un ensemble dénombrable (dont le cardinal est $\aleph_0$). Nous devons donc conclure qu'il existe des irrationnels non algébriques ;
on les appelle les nombres **transcendants**.
De plus ces nombres transcendants forment un ensemble non dénombrable (dont le card est $\aleph_1$).
Cela signifie que si nous prenons au hasard un nombre réel, nous sommes à peu près sûrs de tomber sur un nombre transcendant !
Exemples de nombres transcendants : le plus connu est le nombre π . En connaissez-vous d'autres ?

4) **Théorème** : Quels que soient les nombres réels distincts a et b ($a < b$),
il existe une infinité de rationnels appartenant à]a ;b[.

On exprime cette propriété en disant que $\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$.

5) $x^2 = -1$ et $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \varnothing$. On construit le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ tel que toute équation polynomiale à coefficients entiers de degré n admet n racines. (Théorème fondamental de l'algèbre).
La structure ($\mathbb{C}$,+, $\cdot$) est un corps commutatif, mais non totalement ordonné.
remarque : $\mathbb{C} = \{z = a+ib \mid \{a,b\} \subset \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1 \ (\Leftrightarrow i = \sqrt{-1}\,)\}$

Construction de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

Léopold Kronecker (1823 – 1891) a écrit : « Die ganzen Zahlen hat Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk »
Ce qui se traduit : « Les nombres entiers sont l'oeuvre de Dieu, tout le reste est fabriqué par l'homme».

En 1889, le mathématicien italien Giuseppe Peano introduit une axiomatique de $\mathbb{N}$ qui construit l'ensemble des entiers naturels :

1) 1 est un nombre naturel ;
2) 1 n'est le successeur d'aucun nombre naturel ;
3) tout nombre entier naturel admet un successeur ;
4) deux nombres entiers naturels ayant le même successeur sont égaux ;
5) si un ensemble E de nombre naturel contient le nombre 1 et, si chaque fois qu'il contient un nombre naturel, il contient son successeur, cet ensemble E est $\mathbb{N}$ lui-même .
Ce cinquième axiome de Peano s'appelle **l'axiome de récurrence**
(ou d'induction complète (traduction de l'anglais : complete induction).
On s'y réfère chaque fois que l'on démontre par récurrence qu'une conjecture dépendant d'un indice n est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}$.