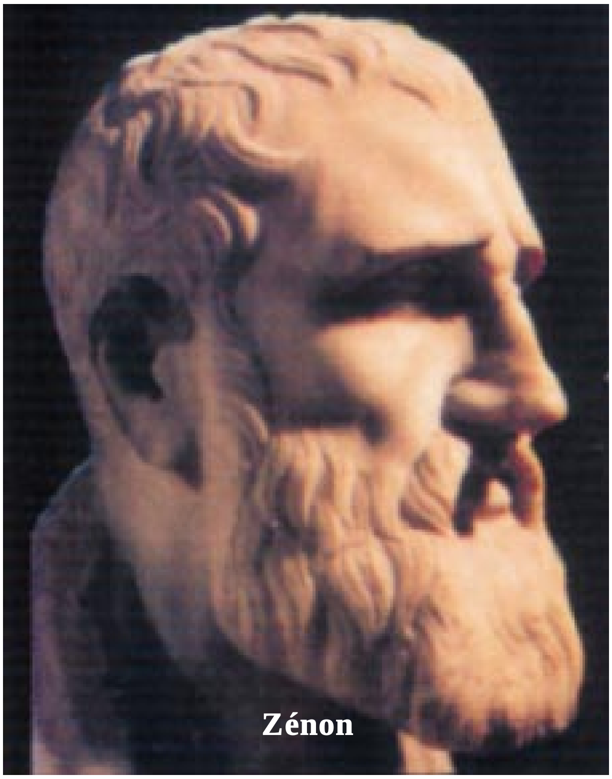
Achille et Zénon

Un demi-millénaire av. J.-C., à Athènes, le philosophe grec **Parménide** fonda une École où vinrent se rencontrer et réfléchir ses compatriotes. (Il était né à Élée dans la Grande Grèce, c'est-à-dire le Sud de l'Italie).

Le plus brillant de ses élèves s'appelait **ZÉNON**. Il avait le don de mettre en scène de petites histoires qui parlaient de l'Être, du Temps, de l'Espace et du Mouvement.

Voici comme en parle *J. L. Borgès*, dans ***La course perpétuelle d'Achille et de la Tortue.***

« Par tout ce qu'implique le mot « joyau » — petitesse précieuse, délicatesse sans fragilité, très grande facilité de transport, limpidité qui n'exclut pas l'impénétrable, fleur pour des années — son emploi est ici légitime. Je ne connais pas de meilleure qualification pour le paradoxe d'Achille, si indifférent aux réfutations décisives qui l'anéantissent depuis vingt-quatre siècles que nous pouvons bien le saluer comme immortel. Les visites répétées du mystère qu'une telle perpétuité postule, les exquises ignorances auxquelles il invita l'humanité, sont autant de générosités dont nous ne pouvons manquer de lui savoir gré. »



Zénon

Et voici le résumé qu'en fait Aristote dans sa Physique (livre VI) :

« Le plus lent à la course ne sera jamais rattrapé par le plus rapide ; car celui qui poursuit doit toujours commencer par atteindre le point d'où est parti le fuyard, de sorte que le plus lent a toujours quelque avance. »

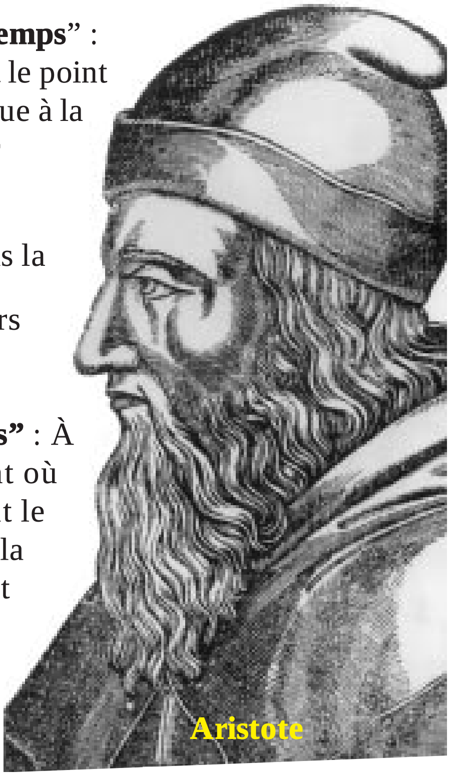
Racontons cette histoire avec plus de détails : **Achille**, symbole de rapidité, veut rattraper la tortue, symbole de lenteur. Supposons qu'il courre deux fois plus vite qu'elle.

Sur la piste [0, 1], Achille part de 0 et la tortue de $\frac{1}{2}$.

Premier "temps" : Achille atteint le point d'où est parti la tortue $\left(\frac{1}{2}\right)$; mais la tortue est alors $\frac{1}{4}$ plus loin.

Deuxième "temps" : Achille atteint le point où était la tortue à la fin du premier temps $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$; mais la tortue est alors 1\8 plus loin.

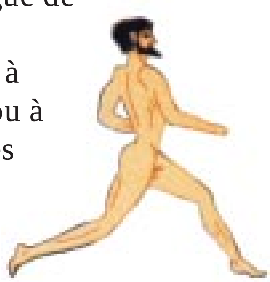
Troisième et autres "temps" : À chaque instant où Achille atteint le point où était la tortue l'instant précédent, celle-ci est déjà un peu plus loin…



Aristote

Il faudra donc, à Achille, une infinité d'instants pour rattraper la tortue…
… et Achille ne pourra donc jamais rattraper la tortue, conclût Zénon d'Élée.
Personne n'est dupe, bien sûr ; l'expérience, s'il en fallait une, montre qu'Achille rattrape bien la tortue.

Mais, il y a, dans cette histoire, une mise en scène générale et qui ressort du meilleur théâtre, de celui que l'on peut jouer encore deux millénaires et demi plus tard.
Car, il est toujours possible d'agencer les mots d'une langue de manière à émouvoir, à faire rire ou à étonner ses interlocuteurs (et soi-même) ; mais, on l'a déjà remarqué (page 19), les paradoxes qui peuvent en naître ne sont pas inquiétants : c'est la vocation de la langue que de montrer l'affrontement contradictoire des thèses, lorsqu'une autre manière de parler en adoucit l'aspect jusqu'à contourner la contradiction.

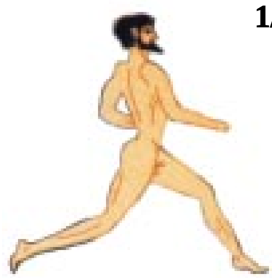


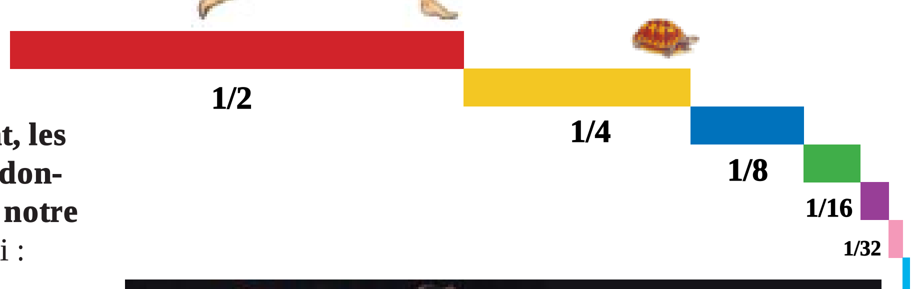
Que disent alors, sur ce point, les mathématiques et quel sens donner à leur discours pour que notre intuition soit satisfaite ? Ceci :
Il s'agit en fait d'ajouter une infinité de durées. Dans l'exemple choisi, ces durées sont exactement

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$$

et l'histoire peut faire croire que la somme d'une infinité de durées est une durée infinie.
"Mathématiquement", l'erreur est la suivante :

La somme d'un très-grand nombre de nombres n'est pas forcément très-grande ; en effet si ces nombres sont très-petits, leur somme totale peut très bien ne pas être très-grande. Mieux encore : le problème de la somme d'un très-grand nombre des très-petites choses est un de ceux qui motive le plus le mathématicien ; c'est un vrai beau problème dont la solution est toujours un plaisir.
À la limite : La somme d'une infinité de nombres n'est pas forcément infinie ; en effet si la suite de ces nombres tend vers zéro, leur somme peut très bien être finie.
Et le problème de la limite de ce type de somme est l'objet initial et passionnant de l'Analyse mathématique (voir les pages suivantes) dont les techniques se sont développées aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles…





$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$