La BRAChIstochrone

P. AUDIN
Palais de la découverte

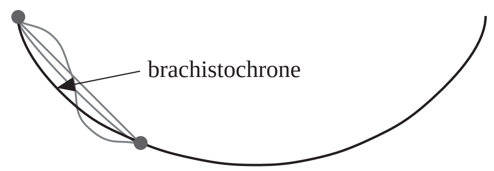
Références sur la brachistochrone :

Quadrature numéros 1 et 2 (épuisés ? Editions du Choix, 25 bis boulevard Lénine, 95100 Argenteuil) avec un (excellent, bien sûr) article de moi-même, avant de se jeter dans l'encyclopédie de Diderot et d'Alembert (réédition des articles mathématiques chez ACL-éditions, 50 rue des écoles, 75005 Paris)
Pour la cycloïde, on trouvera des renseignements utiles dans les célèbres *Mathématiques au fil des âges* et *Routes et dédales*. On peut aussi consulter chez Blanchard (9 rue de Médicis, 75006 Paris) les livres de J. Lemaire *Hypocycloïdes et épicycloïdes* et de Brocard et Lemoyne *Courbes géométriques remarquable*

Au XVII° siècle, la cycloïde a passionné les mathématiciens, qui voulaient prouver que la science avance et que si les Grecs n'avaient pas soupçonné l'existence de la cycloïde, eux allaient non seulement la découvrir, mais en faire le tour — si j'ose dire. Et la cycloïde possède bien des propriétés : longueur, aire d'une arche, équations diverses, développante, … tout ce qui concerne l'étude classique d'une courbe fut épluché et résolu.

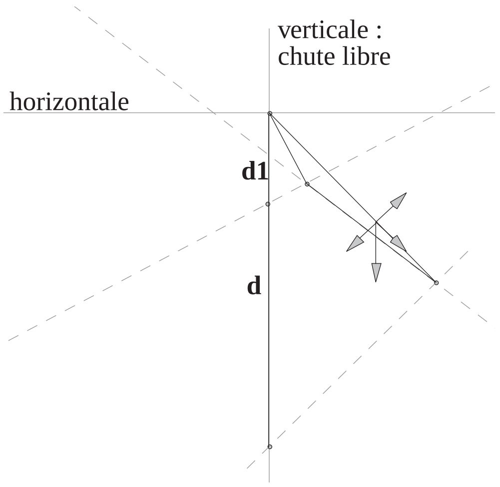
Mais l'engouement pour la cycloïde alla plus loin. Elle est tautochrone : d'où qu'on parte d'un toboggan en forme de cycloïde, on arrivera en bas dans le même temps. Elle est isochrone : les petites ou grandes oscillations sur une cycloïde se font dans le même temps (pendule cycloïdal de Huygens). Et elle est brachystochrone : c'est la courbe que doit suivre un “point matériel” s'il veut descendre de A à B en le temps le plus court, lorsqu'il n'est soumis qu'à l'action de son propre poids.

La recherche de la courbe brachystochrone [y = adjectif = *la plus* rapide, i = nom = *plus* rapide ; tout ça vient du grec] est un des problèmes qui ont créé le calcul des variations : on peut voir le temps de parcours comme une intégrale prise le long de la courbe parcourue, et c'est cette intégrale qu'il faut rendre minimale en fonction de la courbe qui joint les deux points donnés. Se lancer dans le calcul des variations et l'équation (aux dérivées partielles) d'Euler me paraît bien difficile avec des élèves du secondaire. Mais expliquer que le segment de droite [AB] n'est pas le chemin le plus rapide (≠ court) me semble tout à fait faisable avec des élèves qui connaissent le théorème de Pythagore.



Soyons francs, si la solution est la cycloïde, on peut l'approcher suffisamment par une ligne polygonale sur laquelle le temps de parcours sera forcément plus court que sur le segment de droite. Celui-ci n'est qu'une approximation vraiment trop grossière de la cycloïde : la solution a le point de départ comme point de rebroussement, mais le point d'arrivée n'est pas (en général) le “sommet” de la cycloïde. Et pourtant, l'expérience est difficile à réaliser car les temps de parcours sont très brefs si la manip tient sur une table, par exemple. On peut imaginer des systèmes électroniques, afficher les temps de parcours au millième de seconde près, la manip laissera un arrière-goût d'arnaque.

L'idée que je vous propose de suivre ici, c'est qu'une ligne polygonale formée de deux segments seulement, ça doit déjà être une meilleure approximation de la cycloïde qu'un seul segment ; en tout cas, on doit aller plus vite avec ces deux segments (bien choisis) qu'avec le segment seul. Et comme l'écart sera plus faible qu'entre le segment et la cycloïde, n'essayons pas de manip, faisons-la avec Cabri.

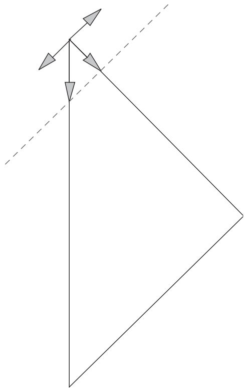


trajet sur le segment

En chute libre verticale, sans vitesse initiale, l'accélération étant g, la distance parcourue serait $(1/2)gt^2$ si t est la durée de la chute.

Sur le plan incliné, et selon le principe de l'action et de la réaction, l'accélération est $g \sin \alpha$, et la distance parcourue est donc :

$$(1/2)g \sin \alpha\, t^2.$$



Ces distances étant dans le rapport *sin* α (et le triangle est rectangle), la distance *d* parcourue en chute libre verticale est obtenue par projection (sur la verticale) du segment, perpendiculairement à lui même.

La durée de parcours du segment incliné est donc la même que pour la distance *d* parcourue en chute libre verticale, *d* obtenue par projection du segment perpendiculairement à lui même sur la verticale.

trajet sur la ligne brisée

— sur le premier segment :

On a le résultat similaire : même durée que pour la distance d_1 parcourue en chute libre verticale, d_1 obtenue par projection du segment orthogonalement à lui même sur la verticale.

— sur le deuxième segment :

Cette fois-ci, il y a une vitesse initiale : celle qui a été acquise par transformation de l'énergie potentielle en énergie cinétique, et qui provient de la différence de hauteur entre les points extrèmes du premier segment. On peut donc imaginer que le point a suivi la droite portant le deuxième segment depuis le début, à partir d'un point situé à la même hauteur que le vrai point de départ. Seule la partie de ce mouvement effectuée sur le (deuxième) segment nous intéresse. Ce segment est la "différence" entre deux autres auxquels on peut appliquer le calcul précédent.

On voit que le mouvement se fait avec la même durée que pour la distance d_3 parcourue en chute libre verticale *moins* la durée pour la distance d_2 parcourue en chute libre verticale, d_3 obtenue par projection du segment prolongé jusqu'à l'horizontale, perpendiculairement à lui même sur la verticale, d_2 étant la projection perpendiculairement à lui-même de ce prolongement.

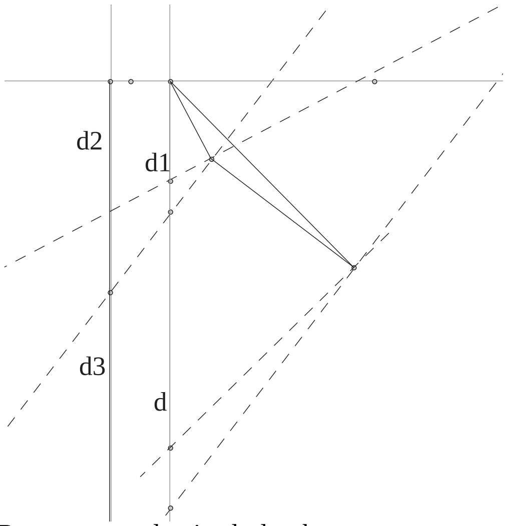
On cherche donc une ligne brisée (en deux segments) de sorte que :

$$\sqrt{d} > \sqrt{d_1} + \sqrt{d_3} - \sqrt{d_2}$$

Mais on ne dispose pour l'instant que des quantités d , d1 , d3 , d2 .Pour obtenir

$$\sqrt{d}\ , \sqrt{d_1}\ , \sqrt{d_3}\ , \sqrt{d_2}\ ,$$

on peut utiliser la macro *racine carrée*. d'*abra*CA*da*BRI n°2.p.17.



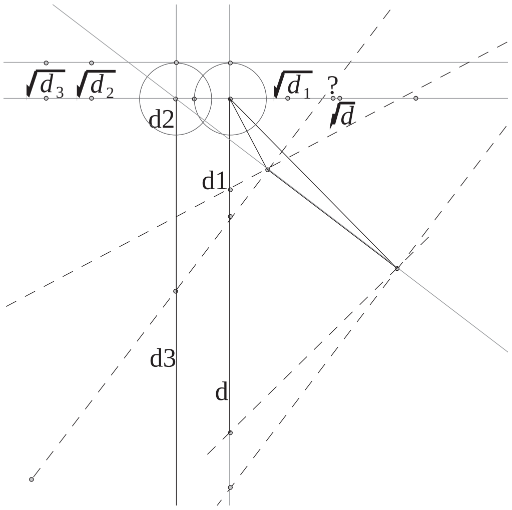
Revenant au dessin de la chute sur un ou sur deux segments, on porte alors les longueurs

$$\sqrt{d}\ , \sqrt{d_1}\ , \sqrt{d_3}\ , \sqrt{d_2}$$

sur l'horizontale avec cette macro, puis on reporte

$$+\sqrt{d_3} - \sqrt{d_2}$$

à partir de $\sqrt{d_1}$ (avec des parallèles) pour faire la comparaison avec $\sqrt{d}$:



Si on choisit bien les deux segments utilisés, on *voit* que les deux segments permettent d'aller plus vite que la *ligne droite*, mieux qu'avec une manip. En attendant de comprendre comment les mathématiciens ont utilisé le principe de Fermat avec des indices de réfraction variables en fonction de l'altitude, on peut essayer de trouver la brachistohrone avec une *vraie* ligne polygonale, constituée de plus de deux segments.