

Examen de mathématiques - 6

(Etude analytique des lieux géométriques)

Les formulaires et tables sont autorisés et la calculatrice aussi.

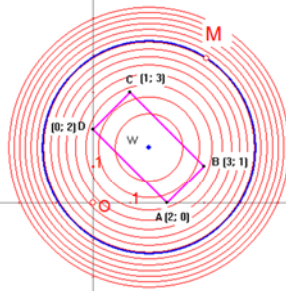
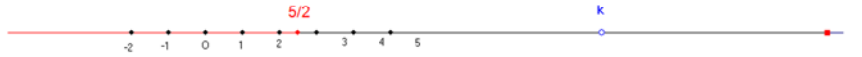
Soit $\mathcal{R} = (O ; \vec{i} ; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

- 1) On donne les points A(2;0), B(3;1), C(1;3) et D(0;2).
Déterminer le lieu géométrique du point M dont la somme des carrés des distances aux points A, B, C et D est égale à $4k$, où $k \in \mathbb{R}$.
Décrire avec **précision** le lieu et discuter selon les valeurs de k .
- 2) On donne la droite d d'équation $d : 3x + 4y - 12 = 0$.
Soit P un point de la droite d et P_1 son projeté orthogonal sur (OI) et P_2 son projeté orthogonal sur (OJ).
Déterminer le lieu géométrique du point M, milieu du segment $[P_1P_2]$ lorsque le point P parcourt la droite d.
Décrire avec **précision** ce lieu.
- 3) Soit un triangle ABC avec $B(b;b)$, $b \neq 0$, $C = S_{(OJ)}(B)$ (le symétrique de B par rapport à la droite (OJ)) et A un point de l'axe des abscisses (OI).
Déterminer le lieu du point H, orthocentre du triangle ABC, lorsque A parcourt la droite (OI).
Décrire avec **précision** ce lieu.

Exercise 1

 $k = 10,71$

Déplacer le point k



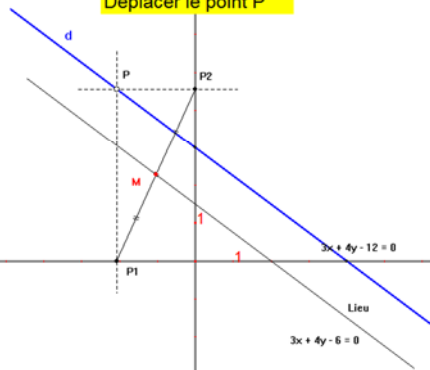
Déplacer le point M

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 42,84 \text{ cm}^2 \text{ (constant)}$$

 $W(1.5; 1.5)$

Exercise 2

Déplacer le point P



Exercise 3

$$x^2 - 4y = 0$$

$y = x$

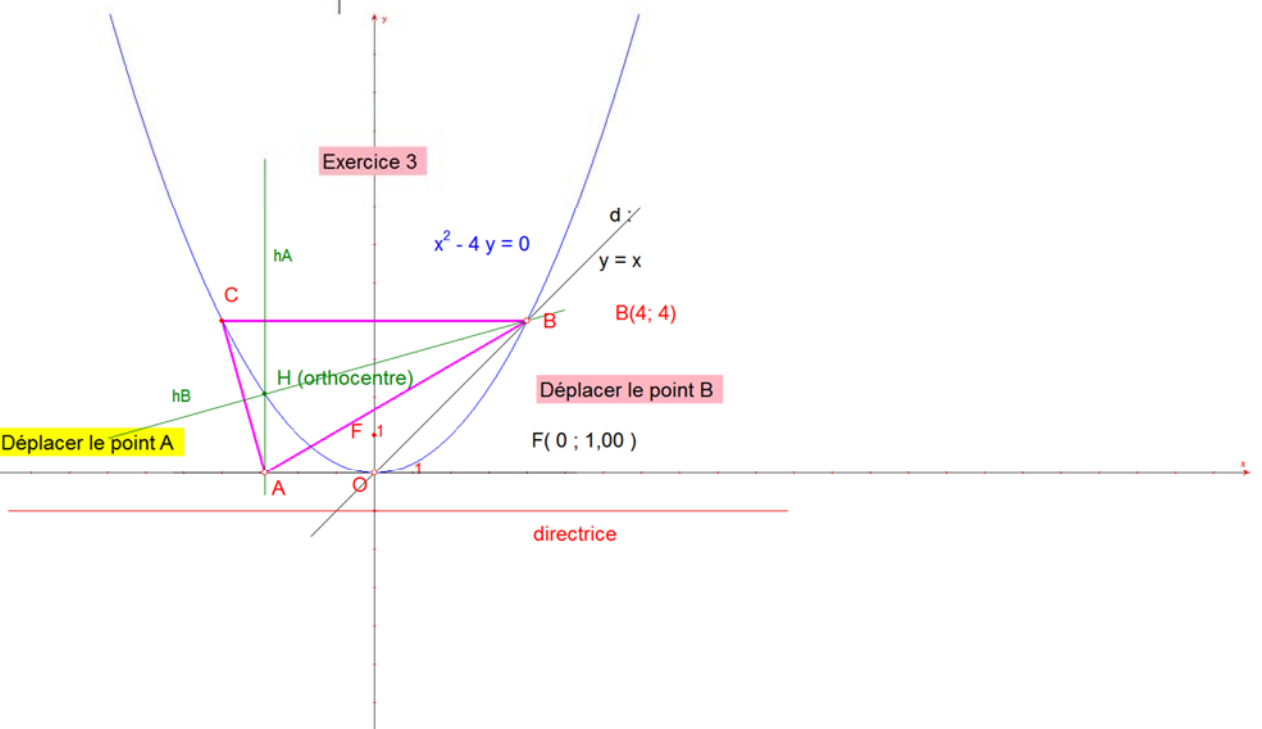
 $B(4; 4)$

Déplacer le point B

 $F(0; 1,00)$

directrice

Déplacer le point A



- 1) $\left\{ \begin{array}{l} * \text{ Constantes: } A(2;0), B(3;1), C(1;3) \text{ et } D(0;2), k \in \mathbb{R} \\ * \text{ point variable: } M(x,y) \in \mathbb{P} \\ * \text{ paramètres: } / \\ * \text{ conditions: } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4k \end{array} \right.$

Résolution analytique:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4k \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 + (x-3)^2 + (y-1)^2 + (x-1)^2 + (y-3)^2 + (x-0)^2 + (y-2)^2 = 4k$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{+y^2 - 4y + 4} + \underbrace{y^2}_{+4} + \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{+y^2 - 2y + 1} + \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{+y^2 - 6y + 9} + \underbrace{y^2}_{+x^2} = 4k$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 - 12x - 12y + 28 - 4k = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 3x - 3y + 7 - k = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = k - 7 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = k + \frac{-28 + 18}{4} = k - \frac{5}{2}$$

Ainsi : si $k = \frac{5}{2}$, alors $M \in \left\{ -2 \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right) \right\}$

si $k < \frac{5}{2}$, alors $M \in \emptyset$

si $k > \frac{5}{2}$, alors $M \in \mathcal{C} \left(-2 \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right), \sqrt{k - \frac{5}{2}} \right)$

Exercice 1

$k = 10,71$

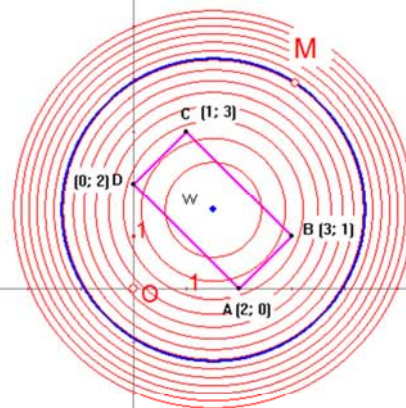
Déplacer le point k

$5/2$

k

Déplacer le point M

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 42,84 \text{ cm}^2 \text{ (constant)}$$



W(1.5; 1.5)

2) Données:

- * Constantes: $d: 3x + 4y - 12 = 0$
- * point variable: $M(x, y) \in P$
- * paramètres: $P(a, b)$ et $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$
- * Conditions:
 - 1) $P \in d$
 - 2) M milieu de $[P_1, P_2]$
où $P_1 = p_{\perp}(P) \in (OI)$
 $P_2 = p_{\perp}(P) \in (OJ)$

Résolution analytique:

$$1) P(a, b) \in d \Leftrightarrow 3a + 4b - 12 = 0$$

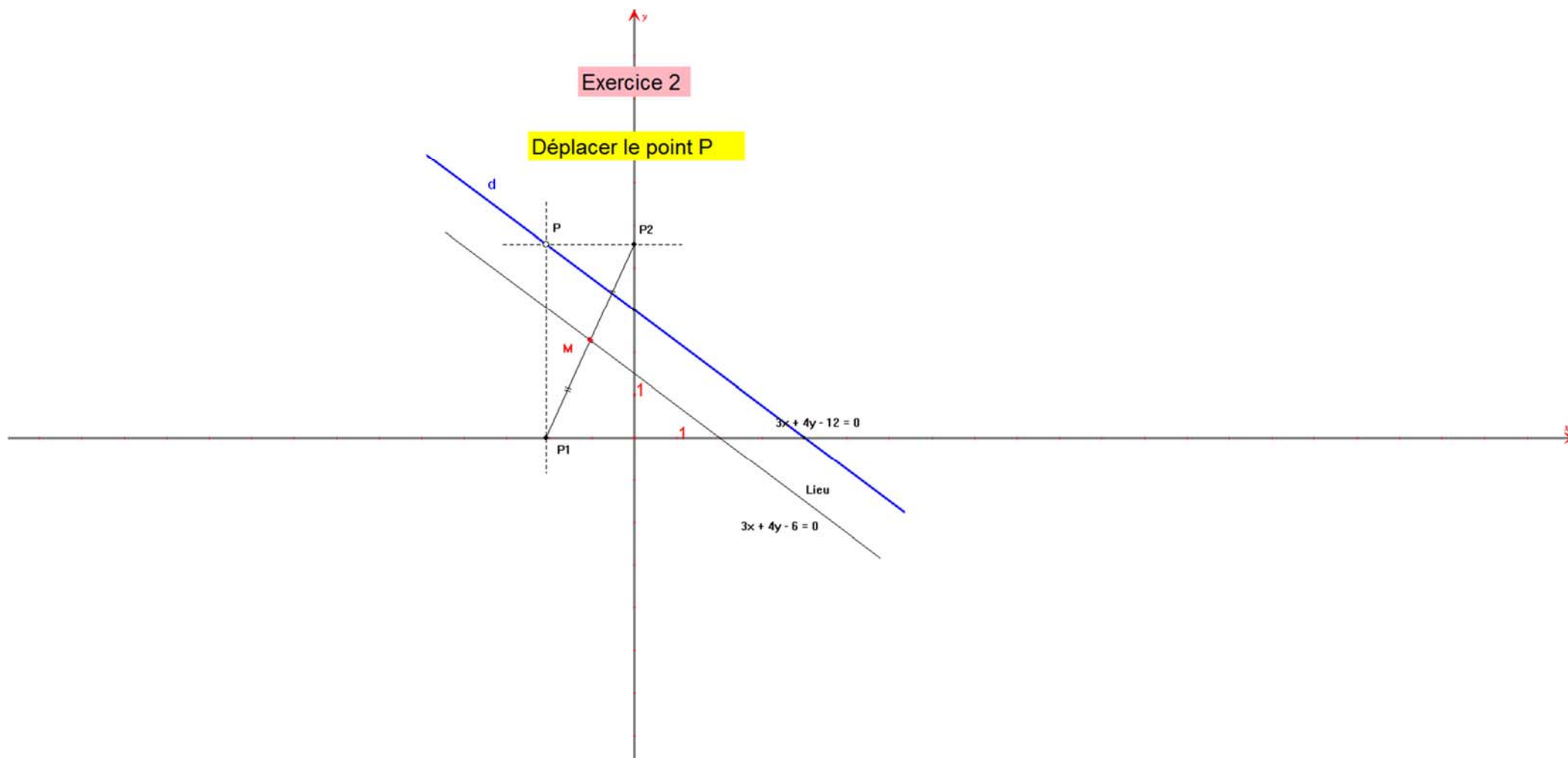
$$2) \begin{aligned} P_1 = p_{\perp}(P) \in (OI) &\Leftrightarrow P_1(a, 0) & \text{et } M(x, y) = M\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right) \\ P_2 = p_{\perp}(P) \in (OJ) &\Leftrightarrow P_2(0, b) & \text{milieu de } [P_1, P_2] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 4b - 12 = 0 \\ x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2x \\ b = 2y \\ 6x + 8y - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(x, y) \in d' \text{ et } d': 3x + 4y - 6 = 0 \\ \text{et } d' \parallel d$$

Exercice 2

Déplacer le point P



- 3) Données :
- * constantes : $b \in \mathbb{R}^*$ et $B(b; c)$
 - * point variable : $H(x; y)$
 - * paramètres : $C(x_0, y_0)$
 $A(x_1, y_1)$

- * conditions :
 - 1) $C = \int_{(0,0)} (B)$
 - 2) $A \in (OI)$
 - 3) H orthocentre du triangle ABC

Résolution : 1) $C = \int_{(0,0)} (B) \Leftrightarrow C(-b; c)$ et $x_0 = -b$
 $y_0 = c$

2) $A \in (OI) \Leftrightarrow A(x_1; 0)$ et $y_1 = 0$

3) $H(x; y) \in h_A \cap h_B \cap h_C$ et h_A hauteur issue de A
et $h_A \perp (BC)$ et (BC) droite horiz.
donc h_A verticale : $x = x_1$

et $h_B \ni B(b; c)$ et $h_B \perp (AC)$ donc $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -b-x_1 \\ c-0 \end{pmatrix}$ vect. normal
de h_B
d'où $h_B : (-b-x_1)x + by + c = 0$

on a à calculer avec $B(b; c) \in h_B \Leftrightarrow (-b-x_1)b + b^2 + c = 0$
 $\Leftrightarrow -bx_1 - x_1b + b^2 = -c \Leftrightarrow c = x_1b$

ainsi $h_B : (-b-x_1)x + by + x_1b = 0$

d'où $\begin{cases} x = x_1 \\ (-b-x_1)x + by = -x_1b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ (-b-x_1)x_1 + by = -x_1b \end{cases}$
et $-bx_1 - x_1^2 + by = -x_1b$
et $y = \frac{x_1^2}{b}$

donc $H(x_1; \frac{x_1^2}{b})$ et $x = x_1$
 $y = \frac{x_1^2}{b}$

$\Rightarrow y = \frac{x^2}{b} \Leftrightarrow y = \frac{1}{b} x^2$ équation d'une parabole
de Foyer $F(0; \frac{b}{4})$ et dir. d: $y = \frac{-b}{4}$

Exercice 3

