

Examen de mathématique

(Etude analytique des lieux géométriques)

Soit $\mathcal{R} = (O ; \vec{i} ; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

- 1) On donne les points $A(2;0)$, $B(3;1)$.
Déterminer le lieu géométrique du point M dont le rapport $\frac{AM}{BM}$ des distances aux points A et B est égale à k , avec $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$
Décrire avec précision le lieu selon les valeurs de k .

- 2) On donne le cercle \mathcal{C} d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$.
Soit P un point du cercle \mathcal{C} et P_1 son projeté orthogonal sur (OI)
et P_2 son projeté orthogonal sur (OJ) .
Déterminer le lieu géométrique du point M , milieu du segment $[P_1P_2]$
lorsque le point P parcourt le cercle \mathcal{C} .
Décrire avec précision ce lieu.

- 3) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, soit un point $A (\neq O)$ fixe sur l'axe des ordonnées, un point B mobile sur l'axe des abscisses et le point C de l'axe des ordonnées tel que le triangle ABC soit rectangle en B .
Quel est le lieu du point P tel que le quadrilatère $BOCP$ soit un rectangle.

Calculatrice, tables et formulaires autorisés.

① Données: $\left\{ \begin{array}{l} \text{constantes: } A(2;0) \text{ et } B(3;1), k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} \\ \text{paramètres: } // \\ \text{variables: } M(x;y) \\ \text{conditions: } \frac{AM}{BM} = k \end{array} \right.$

Résolution: $\frac{AM}{BM} = k \Leftrightarrow AM^2 = k \cdot BM^2$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 = k \cdot [(x-3)^2 + (y-1)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = kx^2 - 6kx + 9k + ky^2 - 2ky + k$$

$$\Leftrightarrow (1-k)x^2 + (1-k)y^2 + (6k-4)x + (2k)y + 4-10k = 0 \quad \text{): } (1-k) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2(3k-2)}{1-k}x + \frac{2k}{1-k}y + \frac{4-10k}{1-k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3k-2}{1-k}\right)^2 + \left(y + \frac{k}{1-k}\right)^2 = \underbrace{\left(\frac{3k-2}{1-k}\right)^2 + \left(\frac{k}{1-k}\right)^2 - \frac{4-10k}{1-k}}$$

$$= \frac{9k^2 - 12k + 4 + k^2 - (4 - 10k)(1-k)}{(1-k)^2}$$

$$= \frac{10k^2 - 12k + 4 - (4 - 4k - 10k + 10k^2)}{(1-k)^2}$$

$$= \frac{2k}{(1-k)^2} > 0 \text{ car } k > 0$$

le lieu est un cercle,

de centre $C\left(\frac{-3k+2}{1-k}, \frac{-k}{1-k}\right)$

de rayon $\sqrt{\frac{2k}{(1-k)^2}}$

② Données: $\left\{ \begin{array}{l} \times \text{ constantes: cercle } \mathcal{C}: x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0 \\ (\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5 + 1 + 4 = 10) \\ \text{donc } \mathcal{C}(C(-1; 2); \sqrt{10}) \\ \times \text{ paramètres: } PM(x_0; y_0) \text{ et } P_1(x_0; 0) \text{ et } P_2(0; y_0) \\ \times \text{ variables: } M(x; y) \\ \times \text{ conditions: } 1) PM \in \mathcal{C}. \\ 2) M \text{ milieu de } [P_1, P_2] \end{array} \right.$

Résolution:

On a 4 variables: x, y, x_0 et y_0 .

On a: 1) $P \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (x_0^2 + 1)^2 + (y_0 - 2)^2 = 10$

2) M milieu de $[P_1, P_2] \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_0 + 0}{2} \\ y = \frac{0 + y_0}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2x \\ y_0 = 2y \end{cases}$

$\Rightarrow (2x+1)^2 + (2y-2)^2 = 10 \quad ; \quad 4$

$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = \frac{10}{4} = (\frac{\sqrt{10}}{2})^2$

Le lieu est le cercle $\mathcal{C}'(C(-\frac{1}{2}; 1), \frac{\sqrt{10}}{2})$, image du cercle donné $\mathcal{C}(C(-1; 2); \sqrt{10})$ dans l'homothétie de centre $O(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3})$ et de rapport $\frac{1}{2}$

- ③ Données: $\left\{ \begin{array}{l} * \text{ constantes: } A(0; a), a \in \mathbb{R}^* \\ * \text{ paramètres: } B(x_0; 0) \text{ et } C(0; y_1) \\ * \text{ variables: } P(x; y) \\ * \text{ conditions: } 1) (AB) \perp (BC) \\ \quad \quad \quad 2) BOCP \text{ rectangle} \end{array} \right.$

Résolution: On a 4 variables: x, y, x_0 et y_1

donc on cherche 3 équations:

$$1) (AB) \perp (BC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x_0^2 - ay_1 = 0 \quad (1)$$

$$2) BOCP \text{ rectangle} \Leftrightarrow P = t_{\overrightarrow{OB}}(C) \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CP}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y - y_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = x & (2) \\ y_1 = y & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2) \text{ et } (3) \text{ dans } (1) : -x^2 - ay = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{a}x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -ay$$

équation de la parabole
de foyer $F(0; \frac{-a}{4})$
de directrice $d: y = \frac{a}{4}$