

Examen de mathématique – 4

(Géométrie analytique plane)

Pour tous les exercices, on donne un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Quel est l'ensemble E représenté par les équations ci-dessous ?
Dans le cas où il s'agit d'un cercle, donner les coordonnées du centre C et le rayon r.
 - a) $x^2 + y^2 - 9x + 12y + 57 = 0$
 - b) $x^2 + 21x + 38 = 0$
 - c) $3x + x^2 + 17y - 4 + y^2 = 0$
 - d) $5x^2 + 5y^2 + 15x - 7y + 2 = 0$

- 2) Calculer une équation, **dans les deux formats du cours**, du cercle :
 - a) de centre C(4 ; -5) et passant par l'origine ;
 - b) centré en A(7 ; -2) et tangent à la droite d d'équation $d : \begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 2 - 7k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$;
 - c) contenant les trois points B(-2 ; -3) et D(4 ; 5) et E(-6 ; 5).

- 3) On donne le cercle \mathcal{C} par une équation : $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 8x - 8y + 23 = 0$
 - a) Prouver que le point T(-4 ; 7) appartient au cercle \mathcal{C} .
 - b) Calculer une équation de la droite d tangente à \mathcal{C} en T.

- 4) On donne le triangle $\triangle ABC$ par les points A(-2,1), B(0,3) et C(1,-4).
Calculer une équation de la bissectrice extérieure b'_B du triangle $\triangle ABC$ de sommet B.

1) a) $E: x^2 + y^2 - 9x + 12y + 57 = 0$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (y + 6)^2 = \frac{81}{4} + 36 - 57$$
$$= \frac{81 + 144 - 228}{4} = \frac{-3}{4} (< 0)$$

donc $E = \emptyset$

$$c) E: x^2 + 21x + 38 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+19) = 0$$

donc $E = d_1 \vee d_2$ où $d_1: x+2=0$ (droite verticale)
 $d_2: x+19=0$ (dr. vert.)

$$d_2: x+19=0 \text{ (dr. vert.)}$$

c) $E: 3x + x^2 + 17y - 4 + y^2 = 0$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + y^2 + 17y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{17}{2}\right)^2 = 4 + \frac{9}{4} + \frac{289}{4} = \frac{314}{4}$$

damit $E = \mathcal{O}\left(\mathcal{O}\left(-\frac{3}{2}, \frac{-17}{2}\right), \frac{\sqrt{314}}{2}\right)$

$$d) E: 5x^2 + 5y^2 + 15x - 7y + 2 = 0 \quad | :5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3x - \frac{7}{5}y + \frac{2}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{10}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{49}{100} - \frac{2}{5}$$

$$= \frac{225}{100} + \frac{49}{100} - \frac{40}{100} = \frac{234}{100}$$

donc $E = G\left(C\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{10}\right); \frac{\sqrt{234}}{10}\right)$

2) a) $\mathcal{O}(4; -5; 2)$ et $\mathcal{O} \ni 0$

donc $r = OC = \|\vec{OC}\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

et $\mathcal{C}: (x-4)^2 + (y+5)^2 = 41 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x + 10y = 0$

c) $\mathcal{O}(A(7, -2); 2)$ et d'après a) b) on a:
$$\begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 2 - 7k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

$$\text{On a : } r = S(A, d) = \frac{|7 \cdot 7 + 3 \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{7^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{44}{\sqrt{58}} = \frac{44 \cdot \sqrt{58}}{58} = \frac{22 \sqrt{58}}{29}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-7}$$

$$\Leftrightarrow 7x+3y+1=0$$

$$\text{donc } C: (x-7)^2 + (y+2)^2 = \frac{44^2}{58} = \frac{22 \cdot 44}{29} = \frac{968}{29}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 14x + 4y + 49 + 4 - \frac{968}{29} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 14x + 4y + \frac{569}{29} = 0$$

L

c) $\mathcal{C} \ni \{B; D; E\}$ où $B(-2; -3)$, $D(4; 5)$ et $E(-6; 5)$

Soit $\mathcal{C}(C(x_0; y_0), r)$ avec 3 inconnues

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{C} \\ \text{et} \\ D \in \mathcal{C} \\ \text{et} \\ E \in \mathcal{C} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2-x_0)^2 + (-3-y_0)^2 = r^2 \quad (1) \\ (4-x_0)^2 + (5-y_0)^2 = r^2 \quad (2) \\ (-6-x_0)^2 + (5-y_0)^2 = r^2 \quad (3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$(1)-(2): (x_0+2)^2 + (y_0+3)^2 = (x_0-4)^2 + (y_0-5)^2 \quad (*) \Rightarrow x_0^2 - 8x_0 + 16 = x_0^2 + 12x_0 + 36$$

$$(2)-(3): (x_0-4)^2 = (x_0+6)^2 \Leftrightarrow 20x_0 = -20 \Leftrightarrow x_0 = -1$$

$$\text{Ainsi: } x_0 = -1 \text{ et dans } (*) \quad 1 + y_0^2 + 6y_0 + 9 = 25 + y_0^2 - 10y_0 + 25 \Leftrightarrow 16y_0 = 40 \Leftrightarrow y_0 = \frac{5}{2}$$

$$\text{puis dans } (1): r^2 = 1 + \frac{121}{4} = \frac{125}{4}$$

$$\text{d'où: } \mathcal{C}: (x+1)^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = \frac{125}{4} = \left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 5y - 24 = 0$$

* Autre méthode: $\mathcal{C}(C(x_0; y_0), r)$ et $C \in M_{[B,D]} \cap M_{[B,E]} \cap M_{[D,E]}$

choisir 2 médiatrices:

$M_{[D,E]}$ est une droite verticale car $(DE): y=5$ est horizontale
ou $M(-1; 5)$ milieu de $[D, E]$

donc $M_{[D,E]}: x = -1$

de plus $M_{[B,D]}: 3x + 4y - 7 = 0$ et $M_{[B,E]}: x - 2y + 6 = 0$

$$\text{d'où } \begin{cases} x = -1 \\ 3x + 4y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ et } C(-1; \frac{5}{2})$$

$$\text{de plus } r = CB = \|\vec{CB}\| = \sqrt{1 + \frac{121}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2} \quad \text{où } \vec{CB} = \begin{pmatrix} -2+1 \\ -3-\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

L

3) Soit $\Gamma: x^2 + y^2 + 8x - 8y + 23 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 + (y-4)^2 = 16 + 16 - 23 = 9 = (3)^2$$

$$\text{et } \Gamma = \mathcal{C}(C(-4; 4), 3)$$

a) $T(-4; 7) \in \Gamma$ car $(-4+4)^2 + (7-4)^2 = 9$
 $\Leftrightarrow 0 + 9 = 9$ vrai

b) Soit d tangente à Γ en $T: M(x, y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{TM} \perp \overrightarrow{CT}$
 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+4 \\ y-7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y-7 = 0$: d est une droite horizontale

4)

Données : * $B = (0, \bar{x}, \bar{y})$ R.O.N.

* $A(-2; 1)$, $B(0; 3)$ et $C(1; -4)$

bissectrice extérieure b' du triangle ABC en B :

Soit b la bissectrice intérieure ;

$$\text{alors } b \vee b' : \frac{|x-y+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|7x+y-3|}{\sqrt{7^2+1^2}}$$

$$\text{ou } (AB) : \begin{vmatrix} x+2 & 12 \\ y-1 & 12 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x-y+3 = 0$$

$$(BC) : \begin{vmatrix} x & 1 \\ y-3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 7x+y-3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y+3}{\sqrt{2}} = \pm \frac{7x+y-3}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow 5x-5y+15 = \pm(7x+y-3)$$

$$\Leftrightarrow 2x+6y-18=0$$

$$\text{ou } 12x-4y+12=0$$

$$\Leftrightarrow x+3y-9=0 : b \text{ ou } b'$$

$$3x-y+3=0 : b' \text{ ou } b$$

par une figure d'étude, on "voit" que b' admet une pente négative, donc $b' : x+3y-9=0$.

