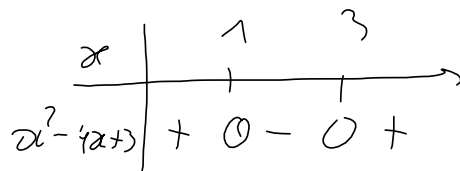


$$(7) f_7(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x + 1}$$

(1) Domaine :

$$D_{f_7} =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[- \{-1\}$$



conditions

$$\begin{cases} x + 1 \neq 0 \\ \text{et} \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \text{et} \\ (x-3)(x-1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \text{et} \\ x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[\end{cases}$$

② Parité: D_{f_7} non symétrique car

$1 \in D_{f_7}$ et $-1 \notin D_{f_7}$ donc aucune parité.

③ asymptotes:

* verticale : $\boxed{x = -1}$

$$\text{car } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ > \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ > \\ <}} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x + 1} = \frac{\sqrt{8}}{0_{\substack{+ \\ -}}} = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \infty$$

* asymptotes affines:

si $x \rightarrow \pm \infty$:

$$m = \lim_{\substack{x \rightarrow \pm \infty \\ +}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow \pm \infty \\ +}} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x(x+1)} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow \pm \infty \\ +}} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}}{x(x+1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow \pm \infty \\ +}} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}}{x(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}}{x(x+1)} = \frac{-1}{-\infty} = 0 = m$$

$$x \rightarrow \overset{+}{-}\infty :$$

$$h = \lim_{x \rightarrow \overset{+}{-}\infty} \left(f(x) - \text{as } x \right) = \lim_{x \rightarrow \overset{+}{-}\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x + 1} = \frac{\overset{+}{-}\infty}{\overset{+}{-}\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \overset{+}{-}\infty} \frac{\overset{+}{-}x \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \overset{+}{-}\infty} \underbrace{\frac{\overset{+}{-}x}{x + 1}}_{= \overset{+}{-}1} \underbrace{\lim_{x \rightarrow \overset{+}{-}\infty} \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}}_{= 1}$$

$$= -1$$

$$= \overset{+}{-}1$$

donc $\boxed{y = -1}$ as. horiz. si $x \rightarrow -\infty$

et $\boxed{y = +1}$ as. horiz. si $x \rightarrow +\infty$

④ Dérivée première :

$$\begin{aligned}
 f'_7(x) &= \left(\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x+1} \right)' = \frac{(\sqrt{x^2 - 4x + 3})'(x+1) - \sqrt{x^2 - 4x + 3} (x+1)'}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}} \cdot (x+1) - \sqrt{x^2-4x+3} \cdot 1}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{\frac{(x-2)(x+1) - (\sqrt{x^2-4x+3})^2}{\sqrt{x^2-4x+3}}}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{(x-2)(x+1) - (x^2 - 4x + 3)}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 - 4x + 3}} = \frac{\cancel{x^2} - x - 2 - \cancel{x^2} + 4x - 3}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 - 4x + 3}} \\
 &= \frac{3x - 5}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 - 4x + 3}} \quad ; \quad f'_7(x) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow 3x - 5 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

et les signes de $f'_7(x)$ sont ceux du numérateur :

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{3}$	3	$+\infty$
$f'_7(x)$	$-$	$+$	0	$+$	$+$

⑤ Dérivée seconde :

$$f''_7(x) = \left(\frac{3x-5}{(x+1)^3 \sqrt{x^2-4x+3}} \right)' = \frac{3(x+1)^2 \sqrt{x^2-4x+3} - (3x-5) \left(\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}} \right)}{(x+1)^4 (x^2-4x+3)}$$

$$\left[(x+1)^2 \sqrt{x^2-4x+3} \right]' =$$

$$2(x+1) \cdot 1 \cdot \sqrt{x^2-4x+3} + (x+1)^2 \frac{(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+3}} =$$

$$\frac{(x+1) \cdot [2 \cdot (x^2-4x+3) + (x+1)(x-2)]}{\sqrt{x^2-4x+3}} =$$

$$\frac{(x+1) \cdot (3x^2 - 9x + 4)}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$= \dots = \frac{(x+1) (-6x^3 + 33x^2 - 60x + 29)}{(x+1)^4 (x^2-4x+3) \sqrt{x^2-4x+3}} \quad ??$$

⑥ Tableau des variations

x	$-\infty$	-1	1		3	$+\infty$
$f'_7(x)$	$-$		$-$		$+$	
$f''_7(x)$	$?$		$?$		$?$	
$f_7(x)$	$y = -1$	A.V.	$+\infty$			$y = 1$

(7) Points particuliers:

* Intersection avec (OY): $f_+(0) = \sqrt{3} \simeq 1,73$ et $A(0, \sqrt{3}) \in \Gamma_{f_+}$

* Int. avec (OI): $f_+(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x \in \{1, 3\}$$

donc $B(1, 0)$ et $C(3, 0) \in \Gamma_{f_+}$

* Int. avec les asymptotes:

$$1) \boxed{y = -1}: \begin{cases} y = f_+(x) \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_+(x) = -1 \\ \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x+1} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & & -1 & \\ \hline -x-1 & + & 0 & - \end{array} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x+1} = -x-1 \quad \text{et } x \in]-\sigma, -1]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = (-x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow -6x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \notin]-\sigma, -1]$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

donc $\Gamma_{f_+} \cap d = \emptyset$ où $d: y = -1$

* Intersection de Γ_{f_+} avec d' , asymp. à $+\sigma$:

$$\begin{cases} y = f_+(x) \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x+1} = x+1 \quad \text{et } x \in [-1, +\sigma[$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = (x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow -6x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \in [-1, +\sigma[$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$$\text{donc } \Gamma_{f_+} \cap d' = \left\{ E\left(\frac{1}{3}; 1\right) \right\}$$

graphique :

esquisse :

$x = -1$

$y = 1$

$y = -1$

x

y

$P.I.$

$+$

$-$

$-$

$?$

$?$

$?$

$+$

$-$

ts simplification

⑨ Prints supplémentaires:

x	-3	-2	4	5
$f_7(x)$	..	---	---	---

Comment "alterrit" la
courbe en $B(1,0)$?
et en $C(3,0)$?

réponse: $f_7(1) = \frac{-2}{4 \cdot 0_+} = -\infty$

donc la tangente à Γ_f en $B(1,0)$ est verticale.

$$\text{et } f'_7(3) = \frac{4}{16 \cdot \bigcirc_+} = +\infty$$

donc la tangente à Γ_f en $C(3,0)$ est aussi verticale.

