

Interrogation de mathématique - 8

(Algèbre - chapitre 2)

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1) $4x^2 - 20x - 56 > 0$

2) $\frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x}$

3) $2x^2 - 20x \leq -50$

4) $4x^2 - 20x + 56 > 0$

5) $\frac{1}{x+1} - 3 < \frac{4-3x}{x-1}$

6) $\frac{x^2-9}{(x+1)(x+3)} \geq 0$

1) $4x^2 - 20x - 56 > 0$ et $x \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow 4(x^2 - 5x - 14) > 0$
 $\Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]7, +\infty[$

ou bien :
 $x^2 - 5x - 14 = 0$ $\begin{cases} m+n = -5 \\ m \cdot n = -14 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow (x-7)(x+2) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m = -7 \\ n = +2 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow x \in \{7; -2\}$

2) $\frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x}$ et $x \in \mathbb{R} - \{-1; 0\}$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \geq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{x - (x+1)}{(x+1) \cdot x} \geq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{-1}{(x+1) \cdot x} \geq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{(x+1) \cdot x} \leq 0$
 $\Leftrightarrow (x+1) \cdot x < 0$
 $\Leftrightarrow x \in]-1, 0[$

$$3) \quad 2x^2 - 20x \leq -50 \quad \text{et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 50 \leq 0 \quad \downarrow :2$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 10x + 25) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 \leq 0 \quad \downarrow \text{ car } (x-5)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{5\}$$

$$4) \quad 4x^2 - 20x + 56 > 0 \quad \text{et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - 5x + 14) > 0 \quad \downarrow :4$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 - 5x + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 25 - 56 = -31 < 0$$

$$\text{et } x \in \emptyset$$

$$\begin{cases} m+m = -5 \text{ ?} \\ m \cdot m = 14 \text{ ?} \end{cases}$$

donc

$$\begin{array}{c|ccc} x^2 - 5x + 14 & + & + & + \\ \hline x & & & \end{array} \rightarrow$$

$$5) \quad \frac{1}{x+1} - 3 < \frac{4-3x}{x-1} \quad \text{et } x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - 3 - \frac{4-3x}{x-1} < 0 \quad \text{et } \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1) - 3(x^2-1) - (4-3x)(x+1)}{(x+1)(x-1)} < 0 \quad \text{et } \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{x-1} - 3x^2 + 3 - \cancel{x} + 3x^2 - 4}{(x+1)(x-1)} < 0 \quad \text{et } \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{(x^2-1)} < 0 \quad \Leftrightarrow \frac{2}{x^2-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \quad \text{et } \dots$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$\begin{array}{c|cc} x^2 - 1 & + & - & + \\ \hline x & -1 & +1 & \end{array} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$6) \quad \frac{x^2 - 9}{(x+1)(x+3)} \geq 0 \quad \text{et } x \in \mathbb{R} - \{-1; -3\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{(x+1)\cancel{(x+3)}} \geq 0 \quad \text{et } \dots$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \cdot (x+1) \geq 0 \quad \text{et } \dots$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup [3; +\infty[\quad \{-1; -3\}$$

$$\frac{(x-3)/(x+1)}{x} \quad | \quad + \quad \emptyset \quad - \quad \emptyset \quad +$$

-1 3

$$\text{can } (x-3)/(x+1) = 1 \cdot x^2 - 2x - 3$$