en termes non mathématiques : " si ils ont la même forme "
Si ils ont aussi la même taille, on dit qu'ils sont isométriques ou égaux)

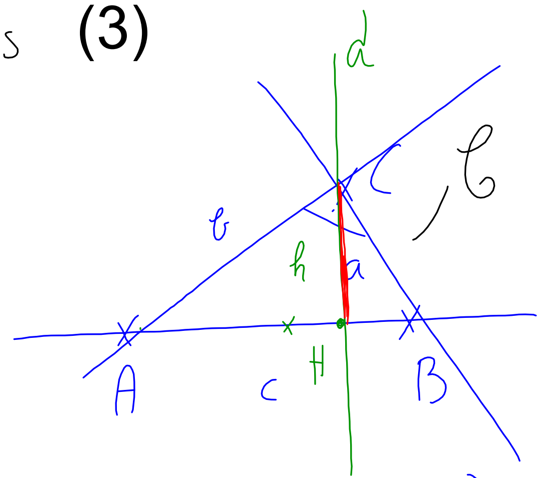
* Comment "repérer" 2 triangles semblables ?

Trois critères de similitude :

1) AAA : ils ont 3 angles de même mesure (2)
2) CCC : ils ont 3 côtés proportionnels (2 à 2)
3) CAC : ils ont un angle égal compris entre 2 côtés proportionnels.

et ⚠ 1 ⟺ 2 ⟺ 3

* Application : Théorèmes (3)



(H) $A \notin (BC)$

$(AC) \perp (BC)$

C

$a = BC$

$b = AC$

$c = AB$

$h = CH$ où $H \in (AB) \cap d$ et $d \perp (AB)$, $d \ni C$

(d est la hauteur du triangle)

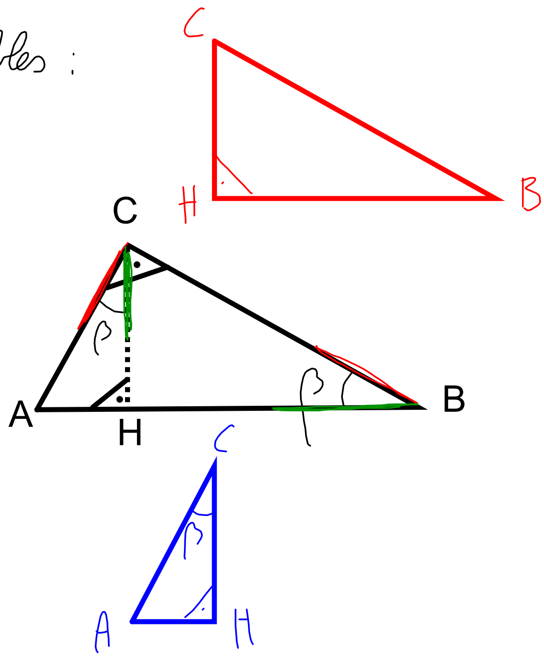
(T) a) $h^2 = c_1 \cdot c_2$ où $c_1 = AH$, $c_2 = HB$

(Thm. de la hauteur)

b) $a^2 = c_2 \cdot c$

$b^2 = c_1 \cdot c$ (Thm. d'Euclide)

D) a) On a 3 triangles semblables :



$\Delta ABC \sim \Delta ACH \sim \Delta BCH$

car : ils ont 2 angles égaux : (AAA)

* un angle droit
* $\measuredangle\beta = \measuredangle CBA = \measuredangle CBH$
  $= \measuredangle ACH$

  car ils ont leurs côtés 2 à 2 perpendiculaires (et ils sont aigus) en effet $(BC) \perp (AC)$ par (H)
  $(AB) \perp (CH)$ par (H)

On a alors

$\Delta AHC \sim \Delta HBC$ et $\Delta AHC \sim \Delta ABC$ et $\Delta HBC \sim \Delta ABC$

donc par CCC :

$$\frac{AH}{HC} = \frac{HC}{BH} = \frac{CA}{BC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c_1}{h} = \frac{h}{c_2} = \left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow h^2 = c_1 \cdot c_2$$

(Thm. de la hauteur)

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CH} = \frac{CA}{AH}$$

$$\frac{c}{b} = \left(\frac{a}{h}\right) = \frac{b}{c_1}$$

$$\Leftrightarrow b^2 = c_1 \cdot c$$

(Thm Euclide)

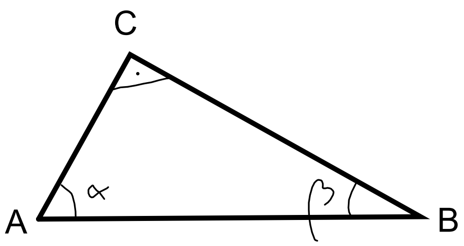
$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{HB} = \frac{CA}{CH}$$

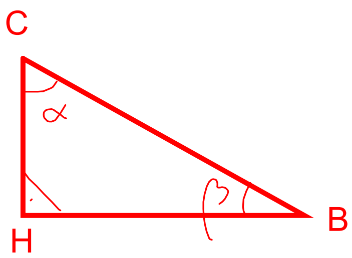
$$\frac{c}{a} = \frac{a}{c_2} = \left(\frac{b}{h}\right)$$

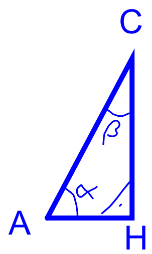
$$\Leftrightarrow a^2 = c_2 \cdot c$$

(Thm. Euclide)

cqfd

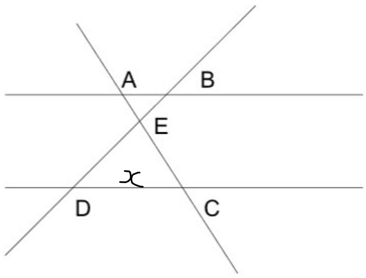

C
A
B
α
β


C
H
B
α
β


C
A
H
α
β

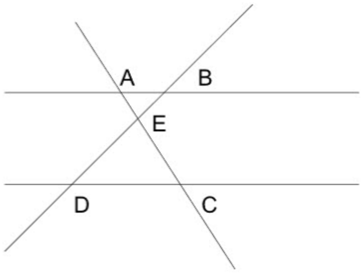
Exercice 4:

On a $AB = 10$, $AE = 5$, $EC = 3$ et (AB) // (DC).
Que vaut CD ?



Exercice 4:

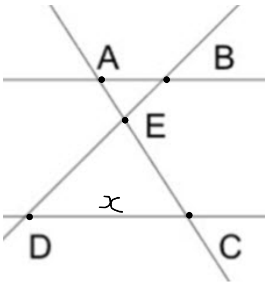
On a AB = 10, AE = 5, EC = 3 et (AB) // (DC).
Que vaut CD ?



<u>Données</u> : $\left|\begin{array}{l} * \ A \in (EC) \\ \ \ \ B \in (DE) \end{array}\right.$ et $(AB) // (DC)$ et $AB = 10$ u.l.
$AE = 5$ u.l.
$EC = 3$ u.l.

<u>Résolution</u> : Calculer $x = DC$

Par Thalès : $\frac{EB}{ED} = \frac{EA}{EC} = \frac{AB}{DC}$ $\left(\frac{\Delta ABE}{\Delta CED}\right)$



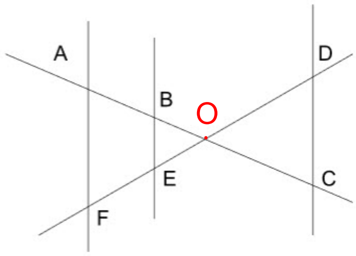
$\Leftrightarrow \left(\frac{EB}{ED} =\right) \frac{5}{3} = \frac{10}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{10} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow x = \overset{2}{\cancel{10}} \cdot \frac{3}{\cancel{5}} = 6$

réponse : $x = DC = 6$ u.l.

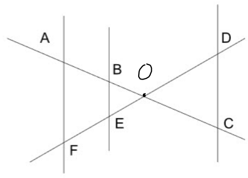
Exercice 5:

On a DE = 3, DF = 4, BC = 4.5, AC = 6 et (BE) // (CD). Que dire de (AF) ?



Exercice 5:

On a DE = 3, DF = 4, BC = 4.5, AC = 6 et (BE) // (CD). Que dire de (AF) ?



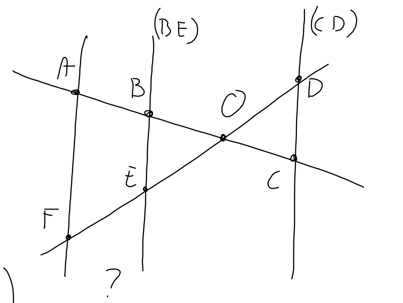
Données $\begin{cases} * \ (AC) \ni B \\ * \ (FD) \ni E \\ * \ (BE) \parallel (CD) \\ * \ DE = 3, \ DF = 4, \ BC = \frac{9}{2}, \ AC = 6 \\ * \ \text{Que peut-on dire de } (AF) \text{ ?} \end{cases}$

Résolution : pour que $(AF) \parallel (BE)$, il faut la proportion de Thalès (réciproque) : $\frac{OB}{OA} = \frac{OE}{OF}$

où $O \in (AB) \cap (FE)$

de plus : $(CD) \parallel (BE)$

$$\Longrightarrow \frac{OB}{OC} = \frac{OE}{OD} = \frac{BE}{CD}$$



de plus :

Si $(AF) \parallel (DC)$ (?)

on aurait $\frac{OA}{OC} = \frac{OF}{OD}$ et réciproquement

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{OA}{OC} = 1 + \frac{OF}{OD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OC + OA}{OC} = \frac{OD + OF}{OD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AC}{OC} = \frac{DF}{OD}$$

d'où $\frac{6}{OC} = \frac{4}{OD}$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{4} = \frac{OC}{OD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{OC}{OD}$$

Mais on a : $(BE) \parallel (CD)$, donc par Thalès :

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OE}{OD} \quad \left(= \frac{BE}{DC} \right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{OB}{OC} = 1 + \frac{OE}{OD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OC + OB}{OC} = \frac{OD + OE}{OD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BC}{OC} = \frac{DE}{OD}$$

donc $$\frac{\frac{9}{2}}{OC} = \frac{3}{OD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{\frac{9}{2}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{\cancel{9}^{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{3}{2}$$

donc on a bien $(AF) \parallel (DC)$ $(\parallel (BE))$

par la réciproque du thm de Thalès

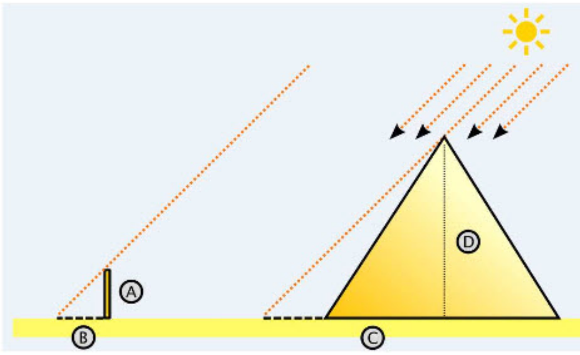
Exercice 6: Un mât est planté sur la place d'un village. La hauteur du mât est inconnue. Un gros boulon est situé à 2 m du sol. L'ombre du mât mesure 4,75 m et l'ombre du boulon est à 0,80 m du pied du mât. En admettant que les rayons du soleil sont parallèles, calculer la hauteur du mât.

Exercice 7: Après quelques jours de voyage, Thalès aperçut la pyramide de Kheops! Thalès n'avait jamais rien vu d'aussi imposant. Les dimensions du monument dépassaient tout ce qu'il avait imaginé. La hauteur de la pyramide était impossible à mesurer. Elle était la construction la plus visible du monde habité et elle était la seule à ne pas pouvoir être mesurée!

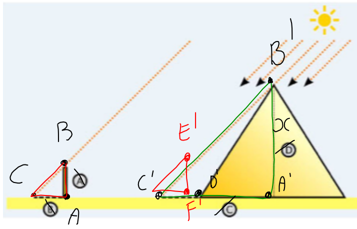
Thalès voulu relever le défi et il y arriva...

Trouver la hauteur de la pyramide en coudée égyptienne, puis en centimètres connaissant :

- La base de la pyramide est un carré de 440 coudées égyptiennes de côté.
- Thalès mesurait 3.25 coudées égyptiennes de haut.
- Son ombre faisait 3 coudées égyptiennes.
- L'ombre de la pyramide faisait 42 coudées.
- Une coudée égyptienne mesure environ 52cm.



Données :



* hauteur de Thalès : $AB = 3{,}25 \cdot C$
* ombre de Thalès : $AC = 3 \cdot C$
* hauteur de la pyramide : $A'B' = x$
* "ombre" de la pyramide : $A'C' = A'D' + D'C' = \frac{1}{2}a + b$
* côté de la base de la pyramide : $a = 440\ C$
* ombre de la pyramide : $b = 42 \cdot C = D'C'$
* une coudée : $C = 52 \cdot cm$

Résolution : On a, par Thalès,

dans les triangles $\Delta A'B'C'$ et $\Delta C'F'E'$
où $\Delta C'F'E' = \Delta CAB$ (triangles isométriques)

$$(F'E') \,//\, (A'B') \Longrightarrow \frac{C'E'}{C'B'} = \frac{C'F'}{C'A'} = \frac{E'F'}{A'B'}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2} \cdot 440 + 42 = 262}$$

$$\Longrightarrow \frac{CA}{\frac{1}{2}a+b} = \frac{AB}{x}$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{262} = \frac{3{,}25}{x}$$

$$\Longrightarrow 3x = 262 \cdot 3{,}25$$

$$\Longrightarrow x = 262 \cdot \frac{3{,}25}{3}$$

$$\Longrightarrow x = \overset{131}{\cancel{262}} \cdot \frac{\cancel{325}\ 13}{\cancel{300}\ \underset{6}{\cancel{12}}}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{131 \cdot 13}{6}\ C$$

d'où $x = \dfrac{131 \cdot 13}{\cancel{6}\ 3} \cdot \overset{26}{\cancel{52}}\ [cm]$

Réponse : $x = AB = \dfrac{131 \cdot 13 \cdot 26}{3}\ [cm] \cong 147{,}6\ [m]$