

Examen de mathématique - bio

(Géométrie analytique plane)

- 1) Répondre de manière claire et précise dans un français correct :
- 4 2 a) Qu'est-ce qu'une base ?
2 b) Qu'est-ce qu'un repère ?
- 2) Compléter les « ... » avec les notions vues au cours des §4-5 :
- a) 1 M milieu du segment $[C,D]$ et $C(c_1 ; c_2)$ et $D(d_1 ; d_2)$ $\Leftrightarrow$...
3 b) 1 $\vec{v} = \overrightarrow{EF}$ et $E(e_1 ; e_2)$ et $F(f_1 ; f_2)$ $\Leftrightarrow$...
c) 1 $M(m_1 ; m_2)$ dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ $\Leftrightarrow$...
- 3) On donne un parallélogramme ABCD,
 M_1 milieu de $[A,B]$ et M_2 milieu de $[B,C]$ et E le point de concours des diagonales.
3 **Faire une figure d'étude claire et précise.**
10 7 Dans le repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, donner les coordonnées des points A, B, C, D, M_1 , M_2 et E.
1 1 1 1 1 1 1
- 4) Dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs
 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} z-1 \\ z^2+2 \end{pmatrix}$
- a) 2 Le couple $(\vec{c}, \vec{b})$ est-il une base de $\mathcal{E}_2$?
11 5 Si oui, calculer x et y si $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{c}, \vec{b})$.
b) 4 Calculer z pour que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{d}$ soient colinéaires.
- 5) Dans un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A (3,-1), B (-2,5) et C (-6,7).
- 2 a) Les points A, B et C sont-ils alignés ? (à prouver sans figure !)
2 b) Calculer les coordonnées du point E, milieu du segment $[A,B]$;
2 c) Calculer x et y si le point D(x,y) est tel que **ABDC** est un parallélogramme ;
3 d) Calculer une équation de la droite (AC) ;
2 e) Le point C appartient-il à la droite d'équation : $4x + 3y + 3 = 0$? (à prouver sans figure)

39pts

1a)

2

Définition 12 Une **base** de $\mathcal{V}_2$ est un couple de vecteurs non colinéaires.

1b)

2

Définition 14 On appelle **repère** du plan un triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où $O \in \mathbf{P}$ et $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}_2$. Le point O se nomme **origine** du repère.

2) Compléter les « ... » avec les notions vues au cours des §4-5 :

1

a) M milieu du segment $[C,D]$ et $C(c_1; c_2)$ et $D(d_1; d_2)$

$$\Leftrightarrow M\left(\frac{c_1+d_1}{2}; \frac{c_2+d_2}{2}\right)$$

1

b) $\vec{v} = \overrightarrow{EF}$ et $E(e_1; e_2)$ et $F(f_1; f_2)$

$$\Leftrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} f_1 - e_1 \\ f_2 - e_2 \end{pmatrix}$$

1

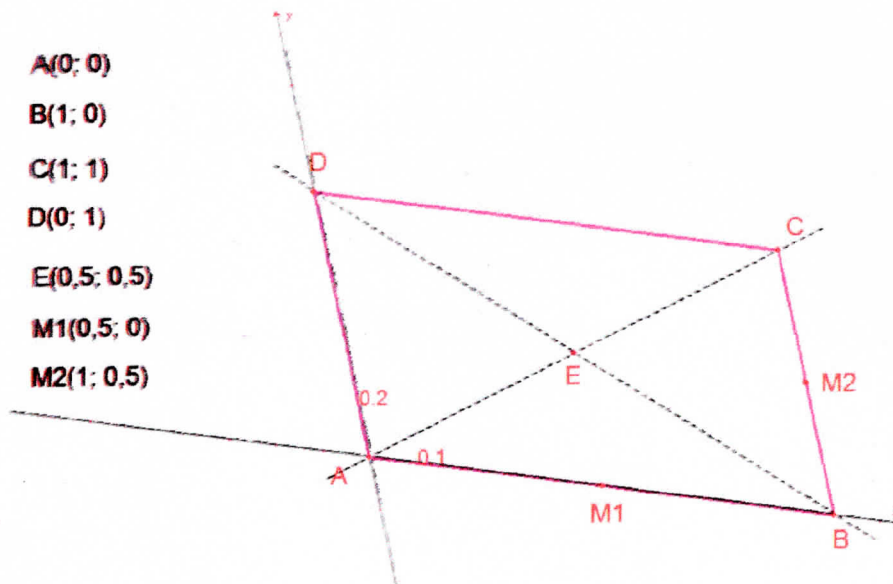
c) $M(m_1; m_2)$ dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

3) Données: $\left\{ \begin{array}{l} * \text{ parallélogramme } ABCD \\ * M_1 \text{ milieu de } [A, B] \\ M_2 \text{ milieu de } [B, C] \\ E \in (AC) \cap (BD) \\ * \mathcal{B}_0 = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \end{array} \right.$

Résolution: On a: $\begin{array}{l} 1 A(0,0) \text{ car } A \text{ est l'origine du repère} \\ 1 B(1,0) \text{ car } B \text{ est le point "extrémité"} \\ \text{du vecteur } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 1^{\text{er}} \text{ vect. de base} \\ 1 D(0,1) \text{ car } D \text{ est le pt "extrémité"} \\ \text{du vecteur } \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 2^{\text{e}} \text{ vect. de base} \\ 1 C(1,1) \text{ car } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1 M_1\left(\frac{1}{2}, 0\right) \text{ car } M_1 \text{ milieu de } [A, B] \\ 1 M_2\left(1, \frac{1}{2}\right) \text{ car } M_2 \text{ milieu de } [B, C] \\ \text{et } B(1,0) \text{ et } C(1,1) \\ 1 E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ car } E \text{ milieu de } [A, C] \end{array}$

A(0; 0)
B(1; 0)
C(1; 1)
D(0; 1)
E(0.5; 0.5)
M1(0.5; 0)
M2(1; 0.5)



10

4) Données: $\{*$ une base $B = (\vec{i}, \vec{j})$
 $\{*$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} =$

a) $(\vec{c}, \vec{b})$ est une base $\Leftrightarrow \det(\vec{c}, \vec{b}) \neq 0$
 2 soit $\det(\vec{c}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 7 = -3 \neq 0$
 donc oui, $(\vec{c}, \vec{b})$ est une base.

Posons alors $\vec{a} = x \cdot \vec{c} + y \cdot \vec{b}$
 2 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans $B = (\vec{i}, \vec{j})$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -5x - y \\ -3 = 7x + 2y \end{cases}$ (à résoudre)

3 $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y = -4 \\ 7x + 2y = -3 \end{cases}$ et $D = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$
 $D_x = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 3 = -5$
 $D_y = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -15 + 28 = 13$

et $x = \frac{-5}{3}$ et $y = \frac{13}{3}$
 donc $\vec{a} = \frac{-5}{3} \cdot \vec{c} + \frac{13}{3} \cdot \vec{b}$

b) Calculer z si $\vec{a}$ et $\vec{d}$ colinéaires:
 soit $\det(\vec{a}, \vec{d}) = \begin{vmatrix} 4 & z-1 \\ -3 & z^2+2 \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (z^2+2) + 3(z-1) = 0$
 4 $\Leftrightarrow 4z^2 + 3z + 5 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 9 - 80 = -71 < 0$
 et $z \in \emptyset$

exercice 5: Données: $\star B = (0, \vec{i}, \vec{j})$

$\star A(3; -1), B(-2; 5)$ et $C(-6; 7)$

a) A, B et C alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

2 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -5 & -9 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-40 + 54}_{=14} = 0$ donc non,
 A, B, C non alignés

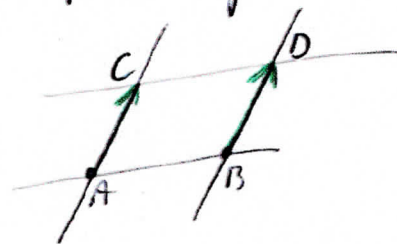
b) $E(\frac{1}{2}, 2)$ milieu de $[A, B]$ avec $A(3; -1)$ car $\frac{1}{2} = \frac{3 + (-2)}{2}$
et $2 = \frac{-1 + 5}{2}$

2

c) calculer x et y si $D(x, y)$ et $ABDC$ parallélogramme

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y-5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 = x+2 \\ 8 = y-5 \end{cases}$



2

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 13 \end{cases}$

d) équation de la droite (AC) : $M(x, y) \in (AC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = 0$

3 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -9 \\ y+1 & 8 \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} 0 \Leftrightarrow 8(x-3) + 9(y+1) = 0$
 $\Leftrightarrow 8x + 9y - 15 \stackrel{1}{=} 0$

e) Soit $d: 4x + 3y + 3 = 0$

$C(-6; 7) \in d \Leftrightarrow 4 \cdot (-6) + 3 \cdot 7 + 3 = 0$
 $\Leftrightarrow -24 + 24 = 0$
 $\Leftrightarrow 0 = 0$

2

donc oui, $C \in d$