46 *Si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ont même direction, comparer* $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ *et* $\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$.

Dans quel cas a-t-on $\|\vec{u}+\vec{v}\| < \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$?

47 *Si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *de sens contraires et* $\|\vec{u}\| \geq \|\vec{v}\|$, *comparer* $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ *et* $\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|$.

48 *Démontrer:* $\|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\| \leq \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|+\|\vec{w}\|$.

49 *Si, dans un parallélogramme* ABCD, $\delta(A,B) = 7$ *et* $\delta(B,C) = 3$, *calculer:*
$\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}\|$, $\|\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{DC}\|$, $\|2\,\overrightarrow{AD} - 3\,\overrightarrow{BC}\|$, $\|2\,\overrightarrow{AC} + 2\,\overrightarrow{CB}\|$. *Donner un encadrement de* $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|$.

50 *Montrer que pour tout vecteur* $\vec{v}$ *non nul, il existe exactement deux vecteurs unitaires de même direction que* $\vec{v}$.

4 Base de $\mathcal{V}_2$

Définition 9 Deux vecteurs sont **colinéaires** si et seulement si l'un est multiple de l'autre.

Exercices

51 *Le vecteur nul et tout vecteur du plan sont colinéaires. Deux vecteurs opposés sont-ils colinéaires? Et deux vecteurs de sens contraires, deux vecteurs de même sens?*

52 *Comment choisir des représentants de deux vecteurs pour que ces deux vecteurs soient colinéaires?*

THEOREME 11 Il existe au moins deux vecteurs non colinéaires dans $\mathcal{V}_2$.

Définition 10 Deux vecteurs non colinéaires sont aussi dits **linéairement indépendants.**

Exercices

53 *On donne un carré* ABCD. *Les vecteurs* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BD}$ *sont-ils colinéaires? Qu'en est-il de* $2\,\overrightarrow{AB}$ et $-3\,\overrightarrow{BD}$? *Montrer que si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ne sont pas colinéaires et* $0 \notin \{x,y\}$, *alors* $x \cdot \vec{u}$ *et* $y \cdot \vec{v}$ *ne sont pas colinéaires.*

54 *Si* ABCD *est un parallélogramme,* $2\,\overrightarrow{AB}$ et $3\,\overrightarrow{CD}$ *sont-ils colinéaires? Montrer que si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires, alors* $x \cdot \vec{u}$ *et* $y \cdot \vec{v}$ *sont colinéaires. La réciproque est-elle vraie?*

Définition 11 On appelle **combinaison linéaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur $\vec{t}$ tel que

$$\vec{t} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$$

Exercice *55*

Si ABCD *est un trapèze et* (AB) || (CD), *dessiner* E *et* F *si* $\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{DC}$ *et* $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} - 2\,\overrightarrow{BD}$. *Comment choisir* α *et* β *si* $\overrightarrow{AA} = \alpha\,\overrightarrow{AC} + \beta\,\overrightarrow{BD}$?

THEOREME 12 Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires si et seulement si

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

COROLLAIRE Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants, alors

$$\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \alpha = x \text{ et } \beta = y$$

THEOREME 13 Tout vecteur de $\mathcal{V}_2$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathcal{V}_2$.

Définition 12 Une **base** de $\mathcal{V}_2$ est un couple de vecteurs linéairement indépendants.

Définition 13 Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}_2$ et $\vec{t} = x\cdot\vec{u} + y\cdot\vec{v}$, alors x et y s'appellent respectivement première et seconde **composantes** de $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Notation: $\vec{t} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base donnée.

COROLLAIRE Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes composantes respectives dans la même base.

Exercices

56 *Si* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est une base de* $\mathcal{V}_2$, *quelles sont les composantes de* $\vec{u}$, *de* $\vec{v}$, *de* $\vec{0}$, *de* $-\vec{v}$ *et celles de* $\vec{u} - \vec{v}$? $(\vec{v}, \vec{u})$ *est-il aussi une base de* $\mathcal{V}_2$?

57 *Si* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est une base de* $\mathcal{V}_2$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, *donner les composantes de* $\vec{a} = \vec{t} + \vec{s}$ *et de* $\vec{b} = 2\vec{t} - 3\vec{s}$. *Si* $\vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{t}$ *et* $\vec{w}$ *sont-ils colinéaires? Et* $\vec{s}$ *et* $\vec{w}$?

58 *Dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$, *si* $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, *montrer que* $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ *et* $\alpha\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$

59 *Dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$, *on donne* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -10 \\ 25 \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$. *A-t-on* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *colinéaires? Même question pour* $\vec{u}$ *et* $\vec{w}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$. *Comment choisir* x *si* $\vec{u}$ *et* $\vec{t}$ *sont colinéaires, si* $\vec{v}$ *et* $\vec{t}$ *non colinéaires?*

THEOREME 14 Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}_2$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\text{dét}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$.

Exercices

60 Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}_2$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$:

a) écrire $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$;

b) a-t-on $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement $\vec{u}$ et $\vec{w}$ colinéaires?

c) si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}_2$, déterminer les composantes de $\vec{i}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Quelles sont les composantes de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$?

61 Déterminer x si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires. Peut-on trouver y si $\vec{s} = \begin{pmatrix} y+1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ y+2 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs colinéaires? Trouver z si $\vec{a} = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ z \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

5 Repère du plan

Définition 14 On appelle **repère** du plan un triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où $O \in \mathbf{P}$ et $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}_2$. Le point O se nomme **origine** du repère.

Exercices

62 Si $O \in (IJ)$, a-t-on $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ repère du plan?

63 Si $A \notin (BC)$, combien de repères peut-on donner à l'aide de ces trois points?

64 *Si* $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$ *est un repère du plan et* $A \notin (CD)$, *comment choisir* C *et* D *pour que* $(O, \vec{OA}, \vec{CD})$ *soit un repère du plan? Si on ajoute* $(OB) \parallel (CD)$, *a-t-on* $(A, \vec{OA}, \vec{CD})$ *repère du plan?*

Définition 15 On appelle **coordonnées** d'un point M du plan dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les composantes du vecteur $\vec{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. La première coordonnée se nomme **abscisse** de M et la seconde **ordonnée**.

Notation : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \Leftrightarrow M(x,y)$

Exercice 65

Si $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ *est un repère du plan, pourquoi a-t-on* $A \notin (BC)$? *On donne* $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$ *et* $\vec{AN} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$. *Quelles sont les coordonnées de* A, B, C, M, N ? *Quelles sont les composantes des vecteurs* $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{MN}$?

THEOREME 15 Si dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ alors:

1. $\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$
2. M milieu de (A,B) $\Leftrightarrow$ $M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$.

Exercice 66

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *on donne* $A(1; 2)$ *et* $B(-3; -1)$. *Trouver* x, y *et* z *si* $M(x, 0) \in (AB)$ *et* $N(0, y) \in (AB)$ *et* $D(z, 2) \in (AB)$. *A-t-on* $E(3; 3) \in (AB)$?

THEOREME 16 Si $(A,B) \in \mathbf{P}^2$ et $A \neq B$, alors $(AB) = \{M \in \mathbf{P} \mid \vec{AM} = \lambda \vec{AB}\}$.

Remarque

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite (AB). Un vecteur directeur est toujours différent du vecteur nul. Tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (AB).

Définition 16 Un **repère d'une droite** passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{v} \neq \vec{0}$ est le couple $(A, \vec{v})$.

Notation

$d(A,\vec{v})$ pour la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$.

Définition 17 Pour un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, les droites $d(O,\vec{i})$ et $d(O,\vec{j})$ sont appelées premier **axe**, respectivement deuxième **axe** du système de coordonnées.

THEOREME 17 Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires.

Exercices

67 *Les droites* (AB) *et* (CD) *sont-elles parallèles dans les cas suivants? Quelle est l'intersection de* (AB) *avec les axes du système de coordonnées?*

a) $A(2;1)$, $B(2;0)$, $C(\frac{3}{2};\frac{1}{2})$, $D(\frac{3}{2};0)$

b) $A(1;-2)$, $B(1;0)$, $C(-1;-\frac{3}{2})$, $D(2;0)$

c) $A(1;-1)$, $B(2;-3)$, $C(3;-2)$, $D(5;-6)$

68 *On donne* $A(3;5)$, $B(1;-3)$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. *Déterminer le point de l'intersection des droites* $d(A,\vec{a})$ *et* $d(B,\vec{b})$.

69 *On donne* $A(-3;-5)$, $B(5;1)$, $C(1;7)$. *Déterminer les milieux des côtés du triangle* ABC *et le point de concours des médianes.*