2 Méthode des déterminants

Théorème de Cramer :

Soit le système "canonique" : $\begin{cases} ax + by = c \\ \text{et} \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

et $0 \notin \{a ; b ; a' ; b'\}$

Ainsi, par combinaisons linéaires :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \begin{array}{|c|c} a' & -b' \\ -a & b \end{array} \iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} aa'x + a'by = a'c \\ -aa'x - ab'y = -ac' \end{cases} \text{ ou } \begin{array}{l} L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{cases} -ab'x - bb'y = -b'c \\ a'bx + bb'y = bc' \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 + L_2 \\ \iff \\ L_3 + L_4 \end{array} \begin{cases} 0 \cdot x + (a'b - ab')y = a'c - ac' \\ \text{et} \\ (-ab' + a'b)x + 0 \cdot y = -b'c + bc' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (ab' - a'b)y = (ac' - a'c) \\ \text{et} \\ (ab' - a'b)x = (b'c - bc') \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} D \cdot x = b'c - bc' = D_x \\ \text{et} \\ D \cdot y = ac' - a'c = D_y \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} D \neq 0 \text{ et } x = \dfrac{D_x}{D} \text{ et } y = \dfrac{D_y}{D} \\ \quad \text{et } (x;y) \in \left\{ \left(\dfrac{D_x}{D} ; \dfrac{D_y}{D} \right) \right\} \\ \text{ou} \\ D = 0 \text{ et } \begin{cases} 0 \cdot x = D_x \\ 0 \cdot y = D_y \end{cases} \end{cases}$$

et $D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$ et $(x;y) \in \emptyset$

(le système est dit impossible)

ou $D_x = 0$ et $D_y = 0$

et $\begin{cases} 0 \cdot x = 0 \\ 0 \cdot y = 0 \end{cases}$ et $(x;y) \in \{ \ldots ? \ldots \}$

$\cancel{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$

le système est dit indéterminé.

14 Résoudre les systèmes paramétriques dans $\mathbb{R}^2$ selon le modèle suivant.

1 $\begin{cases} (m-4)x + my = -2 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$

2 $\begin{cases} mx + 3y = 5 \\ 6x + 2y = 3 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 7x - (m+5)y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 4x + my = 3 \\ mx + 4y = m+1 \end{cases}$

5 $\begin{cases} ax + by = ab+1 \\ abx + ay = a^2+b \end{cases}$

6 $\begin{cases} x - (m+1)y = m \\ (m+2)x + (m+1)y = -1 \end{cases}$

7 $\begin{cases} (a+b)x + by = a \\ (a+b)x + ay = b \end{cases}$

8 $\begin{cases} y = mx + 2m \\ 2x = y - 3m \end{cases}$

9 $\begin{cases} 2x = my + m \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

corrections :exercice 14 les n°2 - 6

② $\begin{cases} mx + 3y = 5 \\ 6x + 2y = 3 \end{cases}$ et $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$\Leftarrow$ $D = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 2m - 18 = 2(m-9)$

$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$ et $D_y = \begin{vmatrix} m & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 3m - 30 = 3(m-10)$

et $\begin{cases} m \neq 9 \text{ et } D \neq 0 \text{ et } (x;y) \in \left\{ \left(\dfrac{1}{2(m-9)} ; \dfrac{3(m-10)}{2(m-9)} \right) \right\} \\ \text{ou} \\ m = 9 \text{ et } D = 0 \text{ et } D_x = 1 \neq 0 \text{ et } (x;y) \in \emptyset \end{cases}$

$$6\ \begin{cases} x - (m+1)y = m \\ (m+2)x + (m+1)y = -1 \end{cases} \quad \text{et } (x;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & -(m+1) \\ m+2 & (m+1) \end{vmatrix} = (m+1) + (m+1)(m+2) = (m+1)(m+3)$$

$$\text{et } D_x = \begin{vmatrix} m & -(m+1) \\ -1 & (m+1) \end{vmatrix} = m(m+1) - (m+1) = (m+1)(m-1)$$

$$\text{et } D_y = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m+2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - m(m+2) = -1 - m^2 - 2m = -m^2 - 2m - 1 = -(m^2+2m+1) = -(m+1)^2$$

$$\text{et } m \notin \{-1;-3\} \text{ et } D \neq 0 \text{ et } x = \frac{D_x}{D} = \frac{\cancel{(m+1)}(m-1)}{\cancel{(m+1)}(m+3)}$$

$$\text{et } y = \frac{D_y}{D} = \frac{-(m+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(m+1)}(m+3)}$$

$$\text{et } (x;y) \in \left\{\left(\frac{m-1}{m+3} ; \frac{-(m+1)}{m+3}\right)\right\}$$

ou

$$m = -1 \text{ et } D = 0 \text{ et } D_x = D_y = 0$$

$$\text{et } \begin{cases} x - 0 \cdot y = -1 \\ \cancel{(x + 0 \cdot y = -1)} \end{cases}$$

$$\text{et } (x;y) \in \{(-1; k) \mid k \in \mathbb{R}\}$$

ou

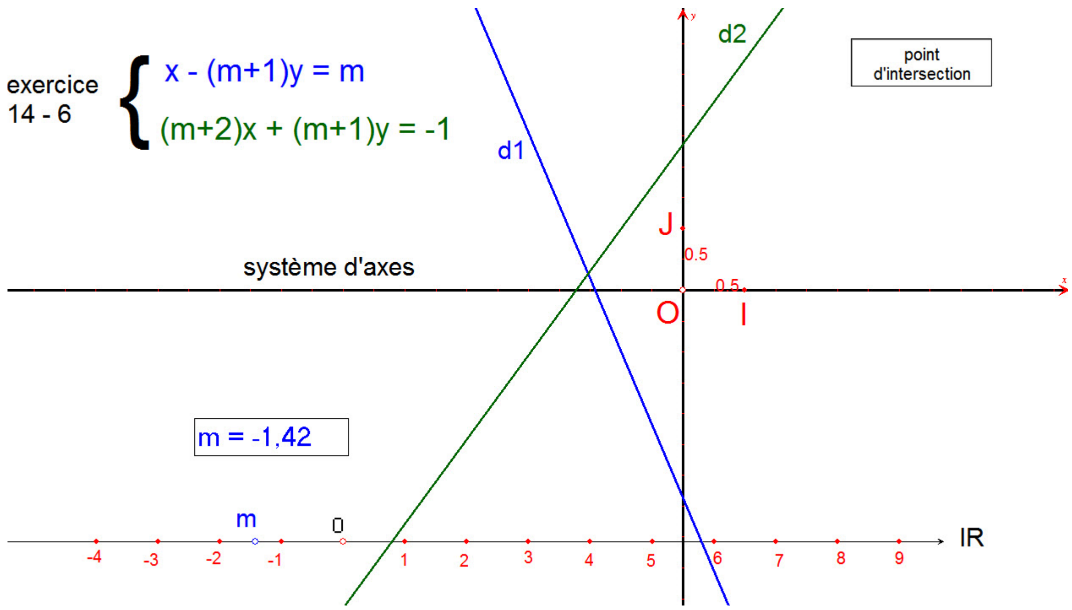
$$m = -3 \text{ et } D = 0 \text{ et } D_x = 8 \neq 0$$

$$(\text{et } D_y = -4 \neq 0)$$

$$\text{et } (x;y) \in \emptyset$$

$$6\ \begin{cases} x - (m+1)y = m \\ (m+2)x + (m+1)y = -1 \end{cases} \quad \text{et } m = -3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -3 \\ +x + 2y = +1 \end{cases}$$



exercice
14 - 6
x - (m+1)y = m
(m+2)x + (m+1)y = -1
d1
d2
point d'intersection
système d'axes
J
0.5
0.5
O
I
m = -1,42
m
0
-4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 9
IR

14 *Résoudre les systèmes paramétriques dans* $\mathbb{R}^2$ *selon le modèle suivant.*

1 $\begin{cases} (m-4)x + my = -2 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$

2 $\begin{cases} mx + 3y = 5 \\ 6x + 2y = 3 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 7x - (m+5)y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 4x + my = 3 \\ mx + 4y = m+1 \end{cases}$

5 $\begin{cases} ax + by = ab+1 \\ abx + ay = a^2+b \end{cases}$

6 $\begin{cases} x - (m+1)y = m \\ (m+2)x + (m+1)y = -1 \end{cases}$

7 $\begin{cases} (a+b)x + by = a \\ (a+b)x + ay = b \end{cases}$

8 $\begin{cases} y = mx + 2m \\ 2x = y - 3m \end{cases}$

9 $\begin{cases} 2x = my + m \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

à faire pour mardi 7 avril : exercice 14 les n°3 - 5 - 8