2 Méthode des déterminants

Théorème de Cramer :

Soit le système "canonique" : $\begin{cases} ax + by = c \\ \text{et} \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

et $0 \notin \{a ; b ; a' ; b'\}$

Ainsi, par combinaisons linéaires :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \begin{vmatrix} a' \\ -a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -b' \\ b \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \begin{cases} aa'x + a'by = a'c \\ -aa'x - ab'y = -ac' \end{cases} \\ L_2 \\ \text{ou} \\ L_3 \begin{cases} -ab'x - bb'y = -b'c \\ a'bx + bb'y = bc' \end{cases} \\ L_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} L_1 + L_2 \\ \Leftrightarrow \\ L_3 + L_4 \end{array} \begin{cases} 0 \cdot x + (a'b - ab')y = a'c - ac' \\ \text{et} \\ (-ab' + a'b)x + 0 \cdot y = -b'c + bc' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (ab' - a'b)y = (ac' - a'c) \\ \text{et} \\ (ab' - a'b)x = (b'c - bc') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D \cdot x = b'c - bc' = D_x \\ \text{et} \\ D \cdot y = ac' - a'c = D_y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D \neq 0 \text{ et } x = \dfrac{D_x}{D} \text{ et } y = \dfrac{D_y}{D} \\ \qquad \text{et } (x ; y) \in \left\{ \left(\dfrac{D_x}{D} ; \dfrac{D_y}{D} \right) \right\} \\ \text{ou} \\ D = 0 \text{ et } \begin{cases} 0 \cdot x = D_x \\ 0 \cdot y = D_y \end{cases} \end{cases}$$

et $D_x \neq 0$ <u>ou</u> $D_y \neq 0$ et $(x ; y) \in \emptyset$

(le système est dit <u>impossible</u>)

ou $D_x = 0$ <u>et</u> $D_y = 0$

? et $\begin{cases} 0 \cdot x = 0 \\ 0 \cdot y = 0 \end{cases}$ et $(x ; y) \in \{ \ldots \}$ ~~$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$~~

(le système est dit <u>indéterminé</u>

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Truc mnémotechnique :

$$D = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

+

−

et $D_x = b'c - bc' = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$

$$D_y = ac' - a'c = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

Exemple : exercice 9-n°1

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=9 \end{cases} \text{ et } (x;y)\in\mathbb{R}^2 \iff \begin{cases} D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0 \\ D_x=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 9 & -1 \end{vmatrix}=-16 \\ D_y=\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}=2 \end{cases}$$

$$\text{et } x=\frac{D_x}{D}=8 \text{ et } y=\frac{D_y}{D}=-1$$

$$\iff (x;y)\in\{(8;-1)\}$$

Exercices

9 *Résoudre dans* $\mathbb{R}^2$ avec la méthode de Cramer :

1 $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 9 \end{cases}$

2 $\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 2 \\ x + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x + 3 = y - 1 \\ -3x + 3y = 12 \end{cases}$

5 $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$

6 $\begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{1}{4} \\ \frac{x-y}{3} = 1 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 2x = 3y + 5 \\ 4y = 3x - 1 \end{cases}$

8 $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

9 $\begin{cases} \frac{x}{5} - y = 3 \\ -x + 5y = 15 \end{cases}$