

2 Méthode des déterminants

Théorème de Cramer :

$$\text{Soit le système "canonique" : } \begin{cases} ax+by=c \\ \text{et} \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

$$\text{et } 0 \notin \{a, b, a', b'\}$$

Ainsi, par combinaisons linéaires :

$$\begin{cases} ax+by=c & | a & | -b \\ a'x+b'y=c' & | -a & | b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \{ ad'x+ab'y=ad'c \\ L_2 \{ -aa'x-ab'y=-ac' \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1+L_2 \{ 0x+(a'b'-ab)y=ad'c-ac' \\ \text{et} \\ L_3+L_4 \{ (-a'b'+ab)x+0y=-b'c'+bc' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a'b'-ab)y=(ad'c-ac') \\ \text{et} \\ (a'b'-ab)x=(b'c'-bc') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D \cdot x = b'c' - bc' = D_x \\ \text{et} \\ D \cdot y = ad'c - ac' = D_y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D \neq 0 \text{ et } x = \frac{D_x}{D} \text{ et } y = \frac{D_y}{D} \\ \text{ou} \text{ et } (x; y) \in \left\{ \left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D} \right) \right\} \\ D = 0 \text{ et } \begin{cases} 0x = D_x \\ 0y = D_y \end{cases} \end{cases}$$

et $D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$ et $(x; y) \in \emptyset$
(le système est dit impossible)

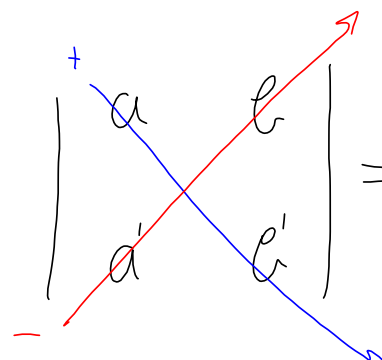
ou $D_x = 0$ et $D_y = 0$

$$? \text{ et } \begin{cases} 0x = 0 \\ 0y = 0 \end{cases} \text{ et } (x; y) \in \{ \dots \}$$

(le système est dit indéterminé ~~$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$~~)

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Truc mnémotechnique :

$$D = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$


$$\text{et } D_x = b'c - bc' = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$$

$$D_y = ac' - a'c = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

Exemple : exercice 9-n°1

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=9 \end{cases} \text{ et } (x;y) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \\ D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = -16 \\ D_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x;y) \in \left\{ \left(8; -1 \right) \right\}$

et $x = \frac{D_x}{D} = 8$ et $y = \frac{D_y}{D} = -1$

Exercices9 Résoudre dans \mathbb{R}^2

avec la méthode de Cramer :

$$1 \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} \frac{x}{2} + y = 2 \\ x + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} x + 3 = y - 1 \\ -3x + 3y = 12 \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{1}{4} \\ \frac{x-y}{3} = 1 \end{cases}$$

$$7 \begin{cases} 2x = 3y + 5 \\ 4y = 3x - 1 \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} \frac{x}{5} - y = 3 \\ -x + 5y = 15 \end{cases}$$