4) Résoudre les équations suivantes :

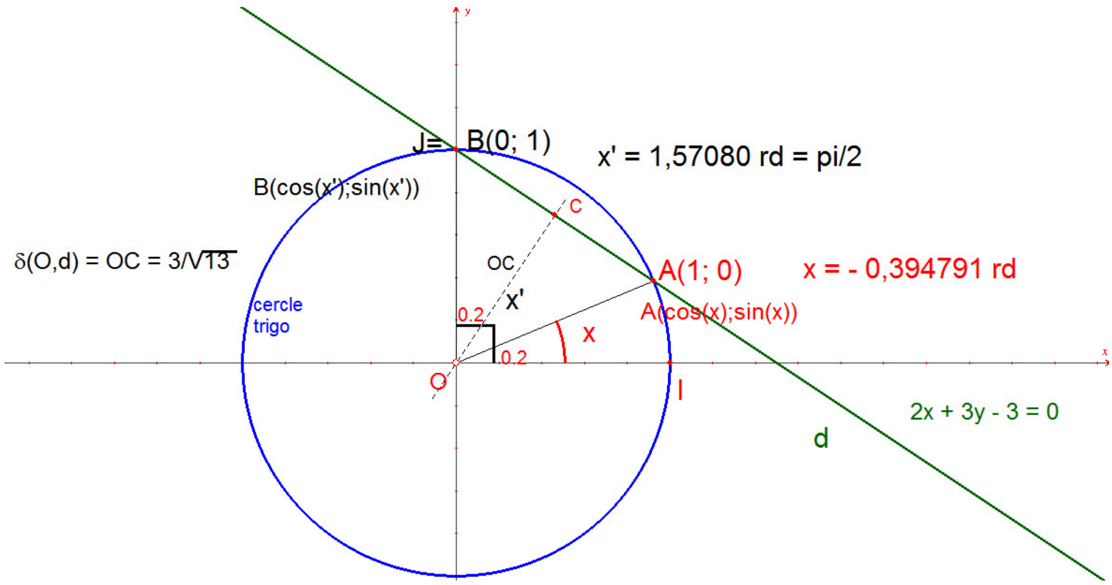
a) $2\cos x + 3\sin x = 1$

b) $3\cos x + 2\sin x = -3$

c) $2\cos x + 3\sin x = 3$

d) $\cos x + 2\sin x = 4$

c) $2\cos(\alpha) + 3\sin(\alpha) = 3$



cf. page 30 du Formulaires et Tables

## Fonctions trigonométriques d'une somme et d'une différence d'arcs

| | |
|---|---|
| $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$ | $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$ |
| $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$ | $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)$ |
| $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$ | $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$ |

cf. page 31 du Formulaires et Tables

## Fonctions trigonométriques du double et du triple d'un arc

| |
|---|
| $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=1-2\sin^2(\alpha)=2\cos^2(\alpha)-1$<br>$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$<br>$\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$ |
| $\cos(3\alpha)=\cos(\alpha)\big(1-4\sin^2(\alpha)\big)=\cos(\alpha)\big(4\cos^2(\alpha)-3\big)$<br>$\sin(3\alpha)=\sin(\alpha)\big(4\cos^2(\alpha)-1\big)=\sin(\alpha)\big(3-4\sin^2(\alpha)\big)$<br>$\tan(3\alpha)=\dfrac{\tan(\alpha)\big(3-\tan^2(\alpha)\big)}{1-3\tan^2(\alpha)}$ |

# * § 4 Le théorème de Ptolémée

H $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$

T $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

Corollaires du thm de Ptolémée :

(H) $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$

(T)
1) $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
2) $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
3) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$
4) $\tan(\alpha-\beta) = \cdots$

(D) ① $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta)) \overset{\text{Ptol.}}{=} \cos(\alpha)\cos(-\beta) - \sin(\alpha)\sin(-\beta)$

$\overset{\text{thm.}}{=} \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

② et $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) \overset{\text{Ptolémée}}{=} \sin(\alpha)\underline{\cos(-\beta)} + \cos(\alpha)\sin(-\beta)$

$\overset{\text{thm.}}{=} \sin(\alpha)\cdot\underline{\cos(\beta)} - \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

③

$$\tan(\alpha+\beta) \overset{\text{théorème}}{=} \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \overset{\text{Ptol.}}{=} \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin(\alpha)\cancel{\cos(\beta)}}{\cos(\alpha)\cancel{\cos(\beta)}} + \dfrac{\cancel{\cos(\alpha)}\sin(\beta)}{\cancel{\cos(\alpha)}\cos(\beta)}}{\underbrace{\dfrac{\cancel{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\cancel{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}}_{1} - \dfrac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}} \overset{\text{thm}}{=} \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$

Question :

$\sin(15^\circ) = \sin(45^\circ - 30^\circ)$

$= \sin(45^\circ + (-30^\circ))$

$= \sin(45^\circ)\cos(-30^\circ) + \cos(45^\circ)\sin(-30^\circ)$

$= \sin(45^\circ)\cos(30^\circ) - \cos(45^\circ)\cdot\sin(30^\circ)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Question :

$\sin(75°) = \sin(45° + 30°)$

Ptolemee
$$= \sin(45°)\cos(30°) + \cos(45°)\cdot\sin(30°)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

remarque :
$$\frac{180}{75} = \frac{\pi}{x}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\overset{5\ \cancel{15}}{\cancel{75}}}{\underset{12\ \cancel{36}}{\cancel{180}}}\cdot\pi = \frac{5}{12}\pi$$

et $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

$\sin(2\alpha) = \cdots$

$\tan(2\alpha) = \cdots$

* On a : $\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha)$

$\overset{\text{Ptol.}}{=} \cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\alpha)$

$= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

$= (1-\sin^2\alpha) - \sin^2(\alpha)$

$= 1 - 2\sin^2(\alpha)$

$= \cos^2(\alpha) - (1-\cos^2(\alpha))$

$= 2\cos^2(\alpha) - 1$

et ?

$\cos(3\alpha) = \ldots$
$\sin(3\alpha) = \ldots$
$\tan(3\alpha) = \ldots$

$\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha + \alpha)$

Ptol.

$= \cos(2\alpha)\cdot\cos(\alpha) - \sin(2\alpha)\sin(\alpha)$

$= (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))\cdot\cos(\alpha) - 2\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)$

$= \cos(\alpha)\cdot(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) - 2\sin^2(\alpha))$

$= \cos(\alpha)(\cos^2(\alpha) - 3\sin^2(\alpha))$ $\quad \sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$

$= \cos(\alpha)(\cos^2(\alpha) - 3(1 - \cos^2(\alpha)))$

$= \cos(\alpha)(4\cos^2(\alpha) - 3)$ $\quad \cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha)$

$= \cos(\alpha)(4(1 - \sin^2(\alpha)) - 3)$

$= \cos(\alpha)(1 - 4\sin^2(\alpha))$

cf. page 30 du Formulaires et Tables

## Fonctions trigonométriques d'une somme et d'une différence d'arcs

| | |
|---|---|
| $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$ | $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$ |
| $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$ | $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)$ |
| $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$ | $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$ |

cf. page 31 du Formulaires et Tables

## Fonctions trigonométriques du double et du triple d'un arc

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=1-2\sin^2(\alpha)=2\cos^2(\alpha)-1$$

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$$

$$\cos(3\alpha)=\cos(\alpha)\big(1-4\sin^2(\alpha)\big)=\cos(\alpha)\big(4\cos^2(\alpha)-3\big)$$

$$\sin(3\alpha)=\sin(\alpha)\big(4\cos^2(\alpha)-1\big)=\sin(\alpha)\big(3-4\sin^2(\alpha)\big)$$

$$\tan(3\alpha)=\frac{\tan(\alpha)\big(3-\tan^2(\alpha)\big)}{1-3\tan^2(\alpha)}$$

cf. page 31 du Formulaires et Tables

## Fonctions trigonométriques de la moitié d'un arc

| | |
|---|---|
| $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos(\alpha)}{2}$ | $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$ |
| $\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$ | $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$ |

## Fonctions trigonométriques exprimées à l'aide de $t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

| | | |
|---|---|---|
| $\cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ | $\sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2}$ | $\tan(\alpha) = \frac{2t}{1-t^2}$ |

## Transformation d'une somme en produit

| | |
|---|---|
| $\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ | $\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ |
| $\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ | $\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ |
| $\tan(\alpha)+\tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$ | $\tan(\alpha)-\tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$ |
| $a\cos(\alpha)+b\sin(\alpha) = A\cos(\alpha-\varphi)$ avec $A=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi$ tel que $\cos(\varphi)=\frac{a}{A}$ et $\sin(\varphi)=\frac{b}{A}$ | |

## Transformation d'un produit en somme

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\big)$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\big(-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)$$